ALGEBRA

Höhere Gleichungen

Lösen von Gleichungen

Grundlagen

Trainingsheft

mit einer Sammlung an Übungsaufgaben zu

Gleichungen dritten bis fünften Grades

Datei Nr. 12260

Friedrich W. Buckel

Stand: 18. September 2016

FRIEDRICH W. BUCKEL

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.schule

Vorwort

In diesem Text sind sehr viele Arten von Gleichungen höheren Grades aufgelistet. Wenn ein Leser nur wissen will, wie man einen bestimmten Gleichungstyp lösen kann, sollte er im Inhaltsverzeichnis den entsprechenden Punkt auswählen. Man muss hier nicht alles durcharbeiten. Allerdings sind für gewisse Gleichungen Grundlagen erforderlich, die man dann schon kennen sollte. Dazu gehören die Lösungsformeln für quadratische Gleichungen. Ich empfehle NUR die allgemeine Lösungsformel, die auch „Mitternachtsformel" genannt wird. Viele bevorzugen die p-q-Formel, die bei einfachen Gleichungen schneller zum Ziel führt. Doch das kann ja nicht Ziel der Mathematik sein. Kompliziertere quadratische Gleichungen dagegen erden mit der p-q-Formel sehr umständlich!

Im Zuge der Stoff-Entrümpelung im Zuge des G8, fallen möglicherweise die Polynomdivision oder das Horner-Schema weg, so dass man ganz viele Gleichungen 3. und 4. Grades nicht mehr händisch lösen kann. Aber dafür arbeiten dann für uns die neuen Grafikrechner oder CAS-Rechner.

Übersicht über die Texte zu quadratischen Gleichungen und ähnlichem

12230	Quadratische Gleichungen 1	Sehr ausführlicher Text
12231	Quadratische Gleichungen 2	Textaufgaben
12232	Quadratische Gleichungen	Lernblatt Das Wichtigste zum Lernen
12233	Quadratische Gleichungen 3	Übungsaufgaben zu 12230
12235	Quadratische Gleichungen	Lernprogramm!
12236	Quadratische Gleichungen	Quadratische Ergänzung, Übungsaufgaben
12238	Gleichungen 3. und 4. Grades, die auf quadratische Gleichungen führen. Dies steht ausführlich in 12230, hier Übungsaufgaben dazu	
12240	Bruchgleichungen, die auf quadratische Gleichungen führen.	
12241	Übungsaufgaben zu 12240	
12245	Wurzelgleichungen 1 (die auf quadratische Gleichungen führen)	
12246	Übungsaufgaben zu 12245	
12250	Reine Potenzgleichungen	
12260	Gleichungen höheren Grades	
12270	Diverse Gleichungen	Methodentraining
71111	Abiturtraining: Gleichungen aller Art	
18040	Behandlung von Gleichungen und Funktionen höheren Grades mit einem GTR. Hier werden viele weitere Gleichungen gelöst, dort aber bezogen auf Funktionen und deren Nullstellen.	

Inhalt

1.2 Vereinfachung quadratischer Gleichungen - Rechentricks

1. Ist $a = \frac{1}{2}$, benötigt man keinen Bruch, weil der Nenner 1 wird:

Beispiel 4 $\boxed{\frac{1}{2}x^2 - 3x - 8 = 0}$

Die ausführliche Lösung sieht etwa so aus:

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot (-8)}}{2 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{1} = 3 \pm \sqrt{25} = 3 \pm 5 = \begin{cases} 8 \\ -2 \end{cases}$$

Kurzlösung: $x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9+16} = 3 \pm 5 = \begin{cases} 8 \\ -2 \end{cases}$

2. Treten andere Brüche in der Gleichung auf, sollte man sie durch eine Multiplikation beseitigen:

Beispiel 5 $\boxed{\frac{1}{4}x^2 + 2x + 3 = 0}$

Wer keine Brüche haben will, multipliziert die Gleichung mit 4: $\boxed{x^2 + 8x + 12 = 0}$

$$x_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{64-48}}{2} = \frac{-8 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{-8 \pm 4}{2} = \begin{cases} -2 \\ -6 \end{cases}$$

Man kann diese Gleichung natürlich auch mit dem Bruch $a = \frac{1}{4}$ lösen:

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - \cancel{4} \cdot \frac{1}{\cancel{4}} \cdot 3}}{2 \cdot \frac{1}{4}} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-3}}{\boxed{\frac{1}{2}}} = \boxed{2} \cdot (-2 \pm 1) = \begin{cases} -2 \\ -6 \end{cases}$$

Beispiel 6 $\boxed{\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{3}x - 8 = 0}$

Die Lösung wird absolut schrecklich, wenn man mit diesen Zahlen rechnet:

$$x_{1,2} = \frac{\frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{1}{9} - 4 \cdot \frac{1}{6} \cdot (-8)}}{\frac{1}{3}} = 3 \cdot \left(\frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{32}{6}}\right) = 3 \cdot \left(\frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{16}{3}}\right)$$

$$x_{1,2} = 3 \cdot \left(\frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{48}{9}}\right) = 3 \cdot \left(\frac{1}{3} \pm \frac{7}{3}\right) = 1 \pm 7 = \begin{cases} 8 \\ -6 \end{cases}$$

Empfehlung: Brüche beseitigen durch Multiplikation mit 6:

$$\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{3}x - 8 = 0 \quad | \cdot 6 \quad \Rightarrow \boxed{x^2 - 2x - 48 = 0}$$

Jetzt entwickelt sich die Rechnung deutlich besser:

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot (-48)}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+192}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{196}}{2} = \frac{2 \pm 14}{2} = \begin{cases} 8 \\ -6 \end{cases}$$

3. Manches Mal kann man durch eine Division kleinere Zahlen erzeugen:

Beispiel 7 $\boxed{8x^2-4x-48=0}$

Die Lösung wird absolut schrecklich, wenn man mit diesen Zahlen rechnet:

$$x_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{16-4\cdot 8\cdot(-48)}}{16}=\frac{4\pm\sqrt{1552}}{16}=\ldots ???$$

Man muss erkennen, dass man die Gleichung „bruchlos" durch 4 dividieren kann:

$$8x^2-4x-48=0 \quad |:4 \qquad \Rightarrow \boxed{2x^2-x-12=0}$$

Jetzt entwickelt sich die Rechnung deutlich besser:

$$x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1-4\cdot 2\cdot(-12)}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{1+96}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{97}}{2}$$

Die Lösungen: $x_1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{97}$ und $x_2=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{97}$

Beispiel 8: $\boxed{x^2+32x+240=0}$

Hier ist a = 1 und es gibt keine Zahl, durch die man die Gleichung dividieren könnte.

Die Lösung sieht also so aus:

$$x_{1,2}=\frac{-32\pm\sqrt{32^2-4\cdot 240}}{2}$$

Das wird aufwändig, denn wer weiß schon, dass $32^2=(2^5)^2=2^{10}=1024$ und $4\cdot 240=960$ ist.

Empfehlung: Dividiere die Gleichung durch 2 und erzeuge damit den günstigen Koeffizienten $a=\frac{1}{2}$, dabei werden auch die anderen Zahlen kleiner:

$$x^2+32x+240=0 \qquad |\ :2$$

$$\boxed{\tfrac{1}{2}x^2+16x+120=0}$$

Damit hat man für die allgemeine Lösungsformel deutlich günstigere Zahlen und vor allem wird der Nenner $2a=2\cdot\frac{1}{2}=1$, so dass man keinen Bruch mehr benötigt.

$$x_{1,2}=-16\pm\sqrt{16^2-4\cdot\tfrac{1}{2}\cdot 120}=-16\pm\sqrt{256-240}=-16\pm 4=\begin{cases}-12\\-20\end{cases}\Rightarrow L=\{-12,-20\}$$

Wobei man im Kopf rechnet: $16^2=256$ und $\underbrace{4\cdot\tfrac{1}{2}}_{=2}\cdot 120=2\cdot 120=240$ und $\sqrt{16}=4$.

1.3 1. Spezialfall: Quadratische Gleichung ohne Absolutglied:

$$\boxed{ax^2 + bx = 0} \qquad (3)$$

Methode:

Immer wenn das Absolutglied fehlt, also c = 0 ist, kann man **x ausklammern**.
Dann entsteht hier $\boxed{x \cdot (ax + b) = 0}$. Das ist ein **Nullprodukt**.
Da ein Produkt nur dann 0 wird, wenn einer der Faktoren 0 ist, folgt hier stets $x_1 = 0$.
Die Klammer führt dann zur zweiten Lösung: $x_2 = -\frac{b}{a}$

	Beispiel 9	Beispiel 10
	$\boxed{x^2 + 3x = 0}$	$\boxed{5x^2 - x = 0}$
x ausklammern:	$x \cdot (x+3) = 0$ (Nullprodukt)	$x \cdot (5x-1) = 0$
1. Faktor:	$x_1 = 0$	$x_1 = 0$
2. Faktor:	$x + 3 = 0 \Rightarrow x_2 = -3$	$5x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{5}$
Lösungsmenge:	$\mathbf{L} = \{0\,;\,-3\}$	$\mathbf{L} = \{0\,;\,\frac{1}{5}\}$

1.4 2. Spezialfall: Reinquadratische Gleichungen:

$$\boxed{ax^2 + c = 0} \qquad (4)$$

Methode:

Man isoliert x^2, so dass eine Gleichung der Form $\boxed{x^2 = k}$ entsteht.
Ist $k > 0$, folgt daraus $x_{1,2} = \pm\sqrt{k}$.
Ist $k = 0$, folgt daraus $x = 0$ -
Ist $k < 0$ hat die Gleichung keine Lösung.

	Beispiel 11	Beispiel 12
	$\boxed{x^2 - 18 = 0}$	$\boxed{5x^2 + 2 = 0}$
x^2 isolieren:	$x^2 = 18$	$x^2 = -\frac{2}{5}$
Die Wurzel ziehen:	$\lvert x \rvert = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$	Keine Lösung, da $x^2 < 0$ ist.
Betrag auflösen:	$x_{1,2} = \pm 3\sqrt{2}$	
Lösungsmenge:	$\mathbf{L} = \{\pm 3\sqrt{2}\}$	$\mathbf{L} = \{\ \}$

Hinweis: $\sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} = 3 \cdot \sqrt{2}$

2 Wichtiges Hilfsmittel: Faktorisierung von Gleichungen

2.1 Zerlegung quadratischer Terme in Linearfaktoren

Beispiel 13 $x^2 - 2x - 15 = 0$

Lösung der Gleichung: $x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+60}}{2} = \frac{2 \pm 8}{2} = \begin{cases} 5 \\ -3 \end{cases}$

Aus $x = 5$ folgt $(x-5) = 0$ und aus $x = -3$ erhält man $(x+3) = 0$

Daraus bildet man das Produkt: $(x-5)(x+3) = 0$

Zum Verständnis:

Die Lösungszahlen 5 und - 3 werden also jeweils von x subtrahiert.
Das ergibt zwei Klammerfaktoren, deren Produkt der Gleichungsterm ist.

Probe:

Durch Ausmultiplizieren dieses Produktes kann man die Probe machen:

$$(x-5)(x+3) = x^2 - 5x + 3x - 15 = x^2 - 2x - 15$$

Dies ist genau der Term der Ausgangsgleichung! Die Probe stimmt also.

Ergebnis:

Die Gleichung $x^2 - 2x - 15 = 0$ hat die Lösungsmenge **L**= { 5 ; - 3 }.

Sie lässt sich daher in Produktform schreiben: (x – 5)(x + 3) = 0.

Wir haben also den Term x^2 - 2x - 15 in Linearfaktoren zerlegt:
$x^2 - 2x - 15 = (x-5)(x+3)$

Beispiel 14 $\frac{1}{2}x^2 - x - 4 = 0$

Lösung der Gleichung: $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1+8} = 1 \pm 3 = \begin{cases} 4 \\ -2 \end{cases}$

Daher kann man die Gleichung auch in Produktform schreiben:

$$\boxed{\tfrac{1}{2}} \cdot (x-4)(x+2) = \tfrac{1}{2}\left(x^2 - 4x + 2x - 8\right) = \tfrac{1}{2}x^2 - x - 4$$

Jetzt muss man beachten, dass der Koeffizient von x^2 extra dazu geschrieben werden muss, sonst wird die Gleichung falsch!

Beispiel 15 $2x^2 + x + 4 = 0$

Lösung der Gleichung: $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-32}}{4} \notin \mathbf{R}$

Da diese quadratische Gleichung keine Lösung hat, kann man den zugehörigen Term auch nicht in Linearfaktoren zerlegen!

2.2 Abspaltung von Linearfaktoren

Information!

Was wir in 2.1 an quadratischen Gleichungen gesehen haben, kann man bei jeder Gleichung durchführen: Wenn sie eine Lösung x_1 besitzt, kann man ihren Gleichungsterm so zerlegen, dass der Faktor $(x-x_1)$ auftritt.

Das nennt man „Abspaltung des Linearfaktors $(x-x_1)$“.

Dazu gibt es bei Gleichungen höheren als 2. Grades zwei manuelle Methoden:

1. Polynomdivision
2. Horner-Schema

Bei CAS-Rechnern verwendet man dazu den Befehl „PropFrac“.

Der Sinn dieser Faktorisierung besteht darin, die Gleichung in ein Nullprodukt zu verwandeln. Jeder Faktor soll dann eine Lösung liefern.

Beispiel 16 Die Gleichung $x^3-3x^2-33x+35=0$ hat die Lösung $x_1=1$, was man durch Probieren feststellen kann. Damit weiß man, dass der Gleichungsterm den Linearfaktor $(x-1)$ enthält. Spaltet man ihn ab, erhält man die Produktdarstellung $(x-1)(x^2-2x-35)=0$, also ein **Nullprodukt**.
Der 2. Faktor liefert die quadratische Gleichung $x^2-2x-35=0$, aus der man dann die restlichen beiden Lösungen berechnen kann.
Insgesamt erhält man dann die Lösungsmenge $\mathbf{L}=\{1;7;-5\}$ (siehe 4.3)

Man sieht also, dass man durch diese Faktorisierung, also Abspaltung von Linearfaktoren eine Chance bekommt, weitere Lösungen zu finden.

Liegt eine Gleichung 4. Grades vor, wird man zuerst zwei Lösungen finden müssen, damit man zwei Linearfaktoren abspalten kann. Der dritte Faktor liefert dann wieder eine quadratische Gleichung, deren Lösungen man berechnen kann.

Beispiel 17 $x^4+5x^3-20x-16=0$
Man muss durch Probieren die Lösungen $x_1=2$ und $x_2=-1$ finden bzw. bestätigen. Spaltet man beide z. B. durch Polynomdivision ab, erhält man den quadratischen Restfaktor x^2+6x+8.
Insgesamt hat man dann die Gleichung so faktorisiert:
$(x-2)(x+1)(x^2+6x+8)=0$
Daraus erhält man am Ende die Lösungsmenge $\mathbf{L}=\{2;-1;-2;-4\}$

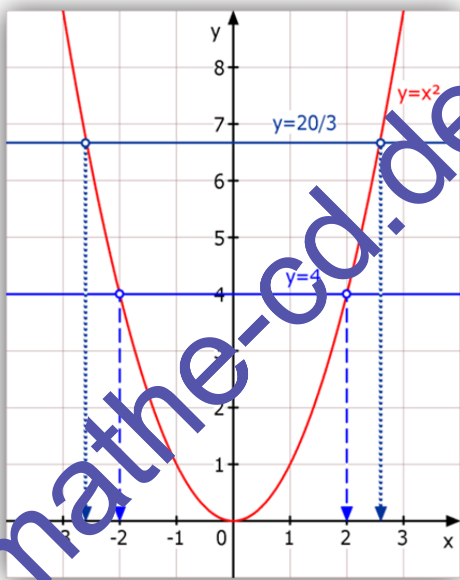
In den Abschnitten 3, 4 und 5 werden dazu Beispiele zu Gleichungen 3., 4. und 5. Grades gezeigt.

Wie man sehen wird, gibt es aber in jedem Fall auch einfache Gleichungen, deren Lösung man auch ohne diese Methode der Linearfaktor-Zerlegung berechnen kann.

3. Reine Potenzgleichungen

Darunter versteht man in der einfachsten Art Gleichungen der Form: $x^n = c$.

Um die Lösungsmenge überblicken zu können, verwenden wir die graphische Darstellung von Potenzfunktionen (Siehe Text 18005):



1. Fall: Die Gleichung $\boxed{x^2 = c}$ stellt die Berechnung der Schnittstellen der Parabel mit der Geraden y = c dar.

Wenn c > 0 ist, gibt es zwei Schnittstellen, die symmetrisch zur y-Achse liegen.

Berechnung:

$x^2 = c \quad | \sqrt{\ }$

$|x| = \sqrt{c} \quad |$ Betrag auflösen

$x_{1,2} = \pm\sqrt{c}$

Beispiele (siehe Abbildung):

a)

$x^2 = 4 \quad | \sqrt{\ }$

$|x| = 2$

$x_{1,2} = \pm 2$

$\mathbf{L} = \{\pm 2\}$

b)

$x^2 = \frac{20}{3} \quad | \sqrt{\ }$

$|x| = \frac{20}{3}$

$x_{1,2} = \pm\frac{20}{3}$

$\mathbf{L} = \{\pm\frac{20}{3}\}$

Erklärungen: Man muss beachten, dass $\sqrt{x^2} = |x|$.

Abkürzung: Viele lassen die zweite Zeile weg und schreiben:

a)

$x^2 = 4 \quad \cancel{|\sqrt{\ }}$

$x_{1,2} = \pm 2$

$\mathbf{L} = \{\pm 2\}$

b)

$x^2 = \frac{20}{3} \quad \cancel{|\sqrt{\ }}$

$x_{1,2} = \pm\frac{20}{3}$

$\mathbf{L} = \{\pm\frac{20}{3}\}$

ACHTUNG FALLE !

Das geht nur dann in Ordnung, wenn man Befehl $|\sqrt{\ }$ weglässt! Wenn man ihn anschreibt oder wie eben die zweite Zeile weglässt, **begeht man streng genommen zwei Fehler**:

Der 1. Fehler: $\sqrt{x^2} \neq x$ (das gilt nur für positive x!, daher gilt allgemein $\sqrt{x^2} = |x|$)

Der 2. Fehler: $\sqrt{4} \neq \pm 2$ (sondern $\sqrt{4} = +2$)

c)

$x^2 = 0$

hat nur eine Lösung:

$x = 0$

$\mathbf{L} = \{0\}$

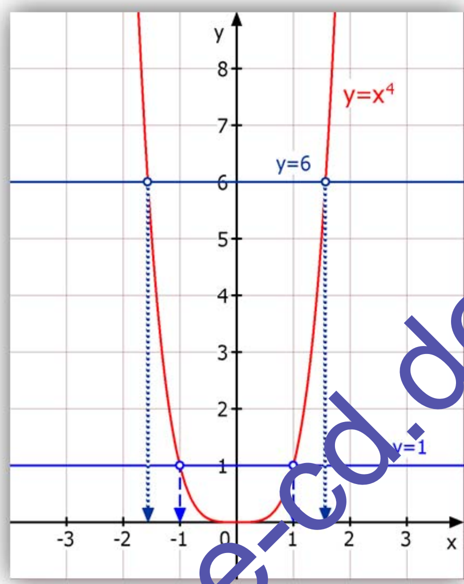
d)

$x^2 = -1$

hat keine Lösung, weil die Parabel nicht unter der x-Achse verläuft wie die Gerade $y = -1$

$\mathbf{L} = \{\ \}$

2. Fall: Die Gleichung $\boxed{x^4 = c}$ stellt die Berechnung der Schnittstellen der Kurve $y = x^4$ mit der Geraden y = c dar.



Wenn c > 0 ist, gibt es zwei Schnittstellen, die symmetrisch zur y-Achse liegen.

Berechnung:

$x^4 = c \quad | \sqrt[4]{\ }$

$|x| = \sqrt[4]{c} \quad |$ Betrag auflösen

$x_{1,2} = \pm\sqrt[4]{c}$

Beispiele (siehe Abbildung):

a)

$x^4 = 1 \quad | \sqrt[4]{\ }$

$|x| = 1$

$x_{1,2} = \pm 1$

$\mathbf{L} = \{\pm 1\}$

b)

$x^4 = 6 \quad | \sqrt[4]{\ }$

$|x| = \sqrt[4]{6}$

$x_{1,2} = \pm\sqrt[4]{6}$

$\mathbf{L} = \{\pm\sqrt[4]{6}\}$

Erklärungen: Man muss beachten, dass $\sqrt[4]{x^4} = |x|$.

Abkürzung: Viele lassen die zweite Zeile weg und schreiben:

$x^4 = 1 \quad \cancel{| \sqrt[4]{\ }}$

$x_{1,2} = \pm 1$

$\mathbf{L} = \{\pm 1\}$

b)

$x^4 = 6 \quad \cancel{| \sqrt[4]{\ }}$

$x_{1,2} = \pm\sqrt[4]{6}$

$\mathbf{L} = \{\pm\sqrt[4]{6}\}$

ACHTUNG FALLE !

Dies geht nur dann in Ordnung, wenn man Befehl $| \sqrt[4]{\ }$ weglässt! Wenn man ihn anschreibt und wie eben die zweite Zeile weglässt, **begeht man streng genommen zwei Fehler**:

Der 1. Fehler: $\sqrt{x^2} \neq x$ (das gilt nur für positive x!, daher gilt allgemein $\sqrt[4]{x^4} = |x|$)

Der 2. Fehler: $\sqrt[4]{1} \neq \pm 1$ (sondern $\sqrt[4]{1} = +1$)

c) $x^4 = 0$

hat nur eine Lösung:

$x = 0$

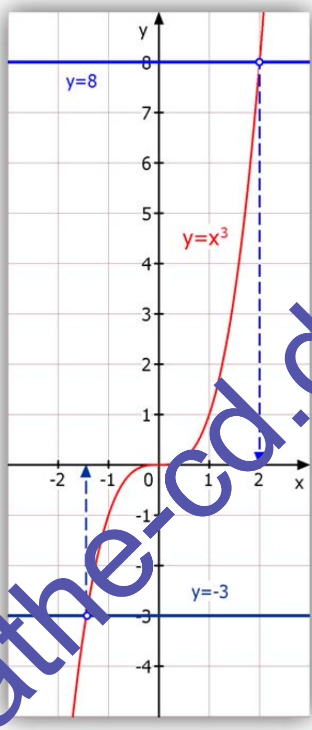
$\mathbf{L} = \{0\}$

d) $x^4 = -1$

hat keine Lösung, weil die Kurve nicht unter der x-Achse verläuft wie die Gerade $y = -1$

$\mathbf{L} = \{\ \}$

3. Fall: Die Gleichung $\boxed{x^3 = c}$ stellt die Berechnung der Schnittstellen der Kurve $y = x^3$ mit der Geraden y = c dar.



Es gibt für jeden Wert von c genau eine Schnittstelle.
Bei der Berechnung muss man negative c anders behandeln:

Berechnung für $c \geq 0$	Berechnung für c < 0:
$x^3 = 8 \quad \vert \sqrt[3]{}$	$x^3 = -3$
$x = \sqrt[3]{8} = 2$	$x = -\sqrt[3]{3} \approx -1{,}44$
$\mathbf{L} = \{2\}$	$\mathbf{L} = \{-\sqrt[3]{3}\}$

Beispiele siehe Abbildung!

Bei einer negativen Zahl muss man auf die richtige Schreibweise achten:

Folgende Schreibweise ist falsch: $x^3 = -8$

$$x = \cancel{\sqrt[3]{-8}} = -2$$

ACHTUNG FALLE !

Denn für alle Wurzelarten gilt: Der Radikand darf keine negative Zahl sein.
Leider hat man die Taschenrechner so programmiert, dass sie dennoch $\sqrt[3]{-8} = -2$ berechnen, zur Freude der Schüler. Aufschreiben darf man es dennoch nicht.

Übersicht	**Lösung der Potenzgleichung $x^n = c$**
1. Für gerades n:	Für $c > 0$ besitzt diese Gleichung 2 Lösungen.
	Für $c = 0$ besitzt diese Gleichung die Lösung $x = 0$.
	Für $c < 0$ besitzt diese Gleichung keine Lösung.
2. Für ungerades n:	Für jedes reelle c gibt es genau eine Lösung.
	Man achte auf die Schreibweise bei negativem c!

4. Gleichungen 3. Grades

4.1 1. Spezialfall: Reine Gleichungen 3. Grades - Siehe Abschnitt 3

Beispiel 18 $\boxed{x^3 = 8}$

Es gibt eine Lösung: $x = \sqrt[3]{8} = 2$

Lösungsmenge $L = \{2\}$

Beispiel 19 $\boxed{x^3 + 5 = 0}$

Umformen: $x^3 = -5$

Lösung: $x = -\sqrt[3]{5}$

Achtung: Falsch ist: $x = \sqrt[3]{-5}$

Laut Definition darf der Radikand jeder Wurzel nie negativ sein.
Leider berechnen manche Taschenrechner aber auch dies ....

Lösungsmenge $\mathbf{L} = \left\{-\sqrt[3]{5}\right\}$

4.2 2. Spezialfall: Gleichungen 3. Grades ohne Absolutglied

Beispiel 20 $x^3 - 2x^2 - 35x = 0$

Diese Gleichung hat kein Absolutglied, weshalb man x ausklammern kann:

Man erhält ein **Nullprodukt:** $x \cdot \left(x^2 - 2x - 35\right) = 0$

Wissen: Ein Produkt wird genau dann 0, wenn einer der Faktoren 0 wird:

1. Faktor : $x_1 = 0$

2. Faktor: $x^2 - 2x - 35 = 0$

mit $x_{1,2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 + 140}}{2} = \dfrac{2 \pm 12}{2} = \begin{cases} 7 \\ -5 \end{cases}$

Lösungsmenge: $L = \{0\,;\,-5\,;\,7\}$

Anmerkung: Jetzt kann man die Gleichung sogar in ein Produkt aus drei Linearfaktoren zerlegen:

$$x^3 - 2x^2 - 35x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(x-7)(x+5) = 0$$

Beispiel 21 $x^3 - 4x = 0$

x ausklammern: $x \cdot \left(x^2 - 4\right) = 0$ (Nullprodukt)

1. Faktor: $x_1 = 0$

2. Faktor: $x_2 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad x_{2,3} = \pm 2$

Lösungsmenge: $L = \{0\,;\,2\,;\,-2\}$

Beispiel 22 $x^3 - 4x^2 = 0$

x^2 ausklammern: $x^2 \cdot (x - 4) = 0$

1. Faktor: $x_1 = 0$ (als doppelte Lösung)

2. Faktor: $x - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_2 = 4$

Lösungsmenge: $L = \{0\,;\,4\}$

4.3 Gleichungen 3. Grades mit Absolutglied - Jetzt muss man faktorisieren

Beispiel 23: $x^3 - 3x^2 - 33x + 35 = 0$

Ziel: Wie in 2.2 beschrieben worden ist, muss man nun eine Lösung durch Probieren finden. Dies ist die Zahl 1. Dann kann man den Linearfaktor (x – 1) abspalten.
Das Ergebnis ist die Produktform der Gleichung:

$$(x-1)(x^2-2x-35)=0$$

Aus der 2. Klammer folgt eine quadratische Gleichung mit den Lösungen 7 und - 5.
Damit kennen wir alle Lösungen der Gleichung!

Durchführung:

Probe für die Zahl 1: $1-3-33+35=0$, also ist 1 eine Lösung der Gleichung.

Es folgt nun die Abspaltung des Linearfaktors $(x-1)$**.**

1. Methode: Ausklammern des Linearfaktors (x – 1) durch **Polynomdivision**

$$\begin{array}{l}
(x^3-3x^2-33x+35):(x-1)=x^2-2x-35\\
\underline{-(x^3-\ x^2)}\\
\quad -2x^2-33x\\
\quad \underline{-(-2x^2+\ 2x)}\\
\qquad -35x+35\\
\qquad \underline{-(-35x+35)}\\
\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Zwischenergebnis: $x^3-3x^2-33x+35=(x-1)(x^2-2x-35)$

Die Methode der Polynomdivision wird in 12116 ausführlich besprochen und erklärt.

2. Methode: Ausklammern des Linearfaktors (x – 1) durch **das Horner-Schema**

	1	– 3	– 33	35
	$\boxed{0}$	1	– 2	– 35
x = 1	1	– 2	– 35	$\boxed{0}$

Hinweis: In der 1. Zeile stehen die gegeben Koeffizienten. Darunter die rote „0",
Vertikal wird addiert, schräg mit der Lösungszahl 1 multipliziert.
Das Horner-Schema wird sehr ausführlich in der Datei 18050 besprochen.

Die Ergebniszahlen gehören zum Divisionsergebnis (Ohne die blaue „0".):

$$x^3-3x^2-33x+35=(x-1)(\mathbf{1}\cdot x^2-2x-35)$$

Bestimmung der Lösungen: $(x-1)(x^2-2x-35)=0$

Der 1. Faktor liefert die bekannte Lösung: $x_1 = 1$.

Der 2. Faktor liefert die restlichen Lösungen: $x_{2,3}=\frac{2\pm\sqrt{4+4\cdot 35}}{2}=\frac{2\pm 12}{2}=\begin{cases}7\\-5\end{cases}$

Lösungsmenge: $\mathbf{L}=\{1;7;-5\}$

Beispiel 24

$\boxed{x^3 - 7x - 6 = 0}$

1. Schritt: Finden einer Probierlösung. Die Probe stimmt für $x_1 = -1$: $-1 + 7 - 6 = 0$

2. Schritt: Ausklammern von $(x+1)$:

Dringende Empfehlung:

Der fehlende Summand mit x^2 sollte mit dem Koeffizienten 0 ergänzt werden.
Dies vermeidet häufig auftretende Fehler.

Dann geht man von dieser Gleichung aus: $\boxed{x^3 + 0x^2 - 7x - 6 = 0}$

1. Methode: Polynomdivision:

$$\begin{array}{l}
(x^3 + 0x^2 - 7x - 6) : (x+1) = x^2 - x - 6 \\
-\left(x^3 + x^2\right) \\
\hline
\quad -x^2 - 7x \\
\quad -\left(-x^2 - x\right) \\
\hline
\qquad -6x - 6 \\
\qquad -(-6x - 6) \\
\hline
\qquad\quad 0
\end{array}$$

2. Methode: Horner-Schema:

	1	0	−7	−6
	0	−1	1	6
x = −1				
	1	−1	−6	$\boxed{0}$

Als Ergebnis dieser Division können wir den Gleichungsterm in zwei Faktoren zerlegen:

$(x^3 - 7x - 6) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+1)(1 \cdot x^2 - 1 \cdot x - 6) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{(x+1)(x^2 - x - 6) = 0}$

1. Faktor: $x + 1 = 0$ ergibt $x_1 = -1$ (schon bekannte Probierlösung)

2. Faktor: $x^2 - x - 6 = 0$ mit $x_{2,3} = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} 3 \\ -2 \end{cases}$

Lösungsmenge: $L = \{-1; -2; 3\}$

Beispiel 25

$\boxed{x^3 + 2x^2 - 15x - 36 = 0}$

1. Schritt: Finden einer Probierlösung. Die Probe stimmt für $x_1 = 4$.

2. Schritt: Abspalten des Linearfaktors $(x - 4)$:

1. Methode: Polynomdivision:

$$\begin{array}{l}
(x^3 + 2x^2 - 15x - 36) : (x - 4) = x^2 + 6x + 9 \\
-(x^3 - 4x^2) \\
\hline
\quad 6x^2 - 15x \\
\quad -(6x^2 - 24x) \\
\hline
\qquad 9x - 36 \\
\qquad -(9x - 36) \\
\hline
\qquad\quad 0
\end{array}$$

2. Methode: Horner-Schema:

	1	2	−15	−36
	0	4	24	36
x = 4				
	1	6	9	$\boxed{0}$

Faktorisierung der Gleichung: $\boxed{(x-4)(x^2 + 6x + 9) = 0}$

1. Faktor: $(x - 4) = 0$ ergibt $x_1 = 4$ (schon bekannte Probierlösung).

2, Faktor: $x^2 + 6x + 9 = 0$ $\quad x_{2,3} = \frac{-6 \pm \sqrt{36-36}}{2} = -\frac{6}{2} = -3$

Lösungsmenge: $L = \{4; -3\}$

Beispiel 26 $x^3 + 7x^2 + 20x + 20 = 0$

1. Schritt: Finden einer Probierlösung. Die Probe stimmt für $x_1 = -2$.
2. Schritt: Abspalten des Linearfaktors (x + 2):

1. Methode: Polynomdivision:

$$\begin{array}{l} (x^3 + 7x^2 + 20x + 20) : (x+2) = x^2 + 5x + 10 \\ -(x^3 + 2x^2) \\ \hline \quad 5x^2 + 20x \\ \quad -(5x^2 + 10x) \\ \hline \qquad 10x + 20 \\ \qquad -(10x + 20) \\ \hline \qquad\quad 0 \end{array}$$

2. Methode: Horner-Schema:

	1	7	20	20
	0	−2	−10	−20
$x = -2$				
	1	5	10	$\boxed{0}$

Das Ergebnis ist in beiden Fällen die Zerlegung der Gleichung in Produktform:

$$(x+2)(x^2 + 5x + 10) = 0$$

1. Faktor: $x + 2 = 0$ d. h. $x_1 = -2$ (schon bekannte Probierlösung)

2. Faktor: $x^2 + 5x + 10 = 0$ mit $x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 40}}{2} \notin \mathbf{R}$

Die Gleichung hat also nur eine Lösung: $L = \{-2\}$.

Beispiel 27 $\frac{3}{16}x^3 - \frac{9}{16}x^2 - \frac{1}{3}x + 1 = 0$

Kommen Brüche in einer Gleichung vor, sollte man erst deren Hauptnenner bestimmen, und dann die Gleichung damit multiplizieren. So verschwinden die Brüche und die Rechnung gestaltet sich wesentlich einfacher. Die Lösungsmenge wird dadurch nicht verändert. Also hier: Mal 48!

$$9x^3 - 27x^2 - 16x + 48 = 0$$

1. Schritt: Finden einer Probierlösung. Die Probe stimmt für $x_1 = 3$.
2. Schritt: Abspalten des Linearfaktors (x -3):

1. Methode: Horner-Schema

	9	-27	-16	48
	0	27	0	- 48
$x_1 = 3$				
	9	0	-16	$\boxed{0}$

2. Methode: Polynomdivision

$$\begin{array}{l} (9x^3 - 27x^2 - 16x + 48) : (x-3) = 9x^2 - 16 \\ -(9x^3 - 27x^2) \\ \hline \qquad -16x + 48 \\ \qquad -(-16x + 48) \\ \hline \qquad\quad 0 \end{array}$$

Zwischenergebnis: $(x-3)(9x^2 - 16) = 0$

1. Faktor: $x - 3 = 0 \Rightarrow x_1 = 3$ (schon bekannt)

2. Faktor: $9x^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{16}{9} \Leftrightarrow x_{2,3} = \pm\frac{4}{3}$

Lösungsmenge: $L = \{3; \frac{4}{3}; -\frac{4}{3}\}$

5. Gleichungen 4. Grades

Zuerst die Gleichungen 4. Grades, die man <u>ohne</u> Linearfaktorabspaltung direkt lösen kann.

5.1 1. Spezialfall: Reine Gleichungen 4. Grades – Siehe Abschnitt 3 !

Beispiel 28 $\boxed{x^4 = 16}$ $x_{1,2} = \pm\sqrt[4]{16} = \pm 2$ (denn $2^4 = 16$) $L = \{\pm 2\}$

Beispiel 29 $\boxed{x^4 = 9}$ $x_{1,2} = \pm\sqrt[4]{9} = \pm\sqrt[4]{3^2} = \pm\sqrt{3}$ $\mathbf{L} = \{\pm\sqrt{3}\}$

Beispiel 30 $\boxed{x^4 + 8 = 0}$ d. h. $x^4 = -8 < 0$ (nicht möglich) $\mathbf{L} = \{\ \}$

5.2 Biquadratische Gleichungen

WISSEN: Eine Gleichung der Form $ax^4 + bx^2 + c = 0$ heißt biquadratisch.

Durch die Substitution $u = x^2$ entsteht daraus eine quadratische Gleichung für u.
Im Grunde handelt es sich um eine quadratische Gleichung für x^2.

Beispiel 31 $\boxed{x^4 + 4x^2 - 192 = 0}$

(a) mit der Substitution: $x^2 = u$

$$u^2 + 4u - 192 = 0$$

$$u_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 4 \cdot 192}}{2} = \frac{-4 \pm 28}{2} = \begin{cases} 12 \\ -16 \end{cases}$$

Rücksubstitution:

Aus $u_1 = 12$ folgt $x^2 = 12$
also $x_{1,2} = \pm\sqrt{12} = \pm 2\sqrt{3}$

Aus $u_2 = -16$ folgt $x^2 = -16$
also $x \notin R$

(b) ohne Substitution

$$x^4 + 4x^2 - 192 = 0$$

$$x^2 = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 4 \cdot 192}}{2} = \frac{-4 \pm 28}{2} = \begin{cases} 12 \\ -16 \end{cases}$$

Aus $x^2 = 12$ folgt $x_{1,2} = \pm\sqrt{12} = \pm 2\sqrt{3}$

Aus $x^2 = -16$ folgt $x \notin R$

Lösungsmenge: $\mathbf{L} = \{\pm 2\sqrt{3}\}$

Man erkennt, dass die x^2 – Methode mit weniger Schreibaufwand verbunden ist.

(Siehe 12220 Seite 23 ff. – Dort auch viele Übungsbeispiele)

5.3 3. Spezialfall: Gleichungen 4. Grades ohne Absolutglied

Beispiel 32 $\boxed{x^4 + 4x^3 + 4x^2 = 0}$

Diese Gleichung wird durch Ausklammern von x^2 so faktorisiert, dass ein quadratischer Restfaktor übrig bleibt, wodurch man sofort alle Lösungen bekommt.

$x^2 \cdot \left(x^2 + 4x + 4\right) = 0$

1\. Faktor: $x^2 = 0$ liefert die doppelte Lösung $x_1 = 0$

2\. Faktor: $x^2 + 4x + 4 = 0$ mit $x_{2,3} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16-16}}{2} = \dfrac{-4}{2} = -2$ (doppelte Lösung)

Lösungsmenge : $L = \{-2; 0\}$

Beispiel 33 $\boxed{\tfrac{1}{4}x^4 - x^2 = 0}$

Zuerst Multiplikation mit 4: $x^4 - 4x^2 = 0$

Ausklammern von x^2: $x^2\left(x^2 - 4\right) = 0$

1\. Faktor: $x^2 = 0$ liefert die doppelte Lösung $x_1 = 0$.

2\. Faktor: $x^2 - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad x_{2,3} = \pm 2$

Lösungsmenge: $L = \{0;\ 2; -2\}$

Beispiel 34 $\boxed{\tfrac{1}{2}x^4 + 3x^3 = 0}$

Zuerst Multiplikation mit 2: $x^4 + 6x^3 = 0$

Ausklammern von x^3: $x^3\left(x + 6\right) = 0$

1\. Faktor: $x^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0$ (dreifache Lösung).

2\. Faktor: $x + 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_2 = -6$

Lösungsmenge: $L = \{\ 0; -6\ \}$

5.4 Gleichungen 4. Grades mit Absolutglied
Jetzt muss man faktorisieren

Beispiel 35 $\boxed{x^4 + 5x^3 - 20x - 16 = 0}$

Liegt eine solche Gleichung 4. Grades vor, wird man zuerst zwei Lösungen finden müssen, damit man zwei Linearfaktoren abspalten kann. Der dritte Faktor liefert dann wieder eine quadratische Gleichung, deren Lösungen man berechnen kann.

1. Schritt: Entdecken der Probierlösung $x_1 = 2$.

2. Schritt: Abspaltung des Linearfaktors $(x - 2)$ durch Polynomdivision:

$$
\begin{array}{l}
\left(x^4 + 5x^3 + 0x^2 - 20x - 16\right) : \left(x-2\right) = x^3 + 7x^2 + 14x + 8 \\
-\left(x^4 - 2x^3\right) \\
\hline
\quad 7x^3 + 0x^2 \\
\quad -\left(7x^3 - 14x^2\right) \\
\hline
\qquad 14x^2 - 20x \\
\qquad -\left(14x^2 - 28x\right) \\
\hline
\qquad\quad 8x - 16 \\
\qquad\quad -\left(8x - 16\right) \\
\hline
\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
\left(x^3 + 7x^2 + 14x + 8\right) : \left(x+1\right) = \left(x^2 + 6x + 8\right) \\
-\left(x^3 + x^2\right) \\
\hline
\quad 6x^2 + 14x \\
\quad -\left(6x^2 + 6x\right) \\
\hline
\qquad 8x + 8 \\
\qquad -\left(8x + 8\right) \\
\hline
\qquad\quad 0
\end{array}
$$

Die erste Division liefert: $(x-2)\left(x^3 + 7x^2 + 14x + 8\right) = 0$. Man benötigt eine weitere Abspaltung, weil noch der Grad 3 vorhanden ist. Die nächste Probierlösung sucht man in der großen Klammer und findet $x_2 = -1$. $(-1)^3 + 7\cdot(-1)^2 + 14\cdot(-1) + 8 = -1 + 7 - 14 + 8 = 0$

Also klammert man aus der großen Klammer durch eine weitere Polynomdivision (x+1) aus (rechter Kasten). Ergebnis: $(x-2)\left(x^3 + 7x^2 + 14x + 2\right) = 0$ geht über in $(x-2)(x+1)\left(x^2 + 6x + 8\right) = 0$

Man sollte dies verkürzen und sofort durch beide Linearfaktoren dividieren, also durch $(x-2)(x+1) = \left(x^2 - x - 2\right)$.

Ergebnis: $(x-2)(x+1)\left(x^2 + 6x + 8\right) = 0$

Die ersten beiden Klammern liefern die schon bekannten Lösungen 2 und -1.

$$
\begin{array}{l}
\left(x^4 + 5x^3 + 0x^2 - 20x - 16\right) : \left(x^2 - x - 2\right) = x^2 + 6x + 8 \\
-(x^4 - \ x^3 - 2x^2) \\
\quad 6x^3 + 2x^2 - 20x \\
\quad -(6x^3 - 6x^2 - 12x) \\
\qquad 8x^2 - 8x - 16 \\
\qquad -(8x^2 - 8x - 16) \\
\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

3. Schritt: Nullstellen des quadratischen Terms:

$$x^2 + 6x + 8 = 0 \quad \text{führt zu} \quad x_{3,4} = \frac{-6 \pm \sqrt{36-32}}{2} = \frac{-6 \pm 2}{2} = \begin{cases} -2 \\ -4 \end{cases}$$

Lösungsmenge: $L = \{-1; 2; -2; -4\}$

Hinweis: Auf der nächsten Seite wird gezeigt, wie man anstelle der Polynomdivision das einfachere Horner-Schema durchführt.

Zweifaches Horner-Schema:

1. Schritt: Division von $x^4 + 5x^3 - 20x - 16$ durch (x-2)

	1	5	0	-20	-16
$x_1 = 2$	0	2	14	28	16
	1	7	14	8	$\boxed{0}$

Zwischenergebnis: $x^4 + 5x^3 - 20x - 16 = (x-2)(x^3 + 7x^2 + 14x + 8)$

2. Schritt: Entdecken der zweiten Probierlösung $x_2 = -1$.
Man setzt das Horner-Schema für den Klammerterm 3. Grades an und verwendet dazu die Zahl -1. Damit erreicht man zweierlei. Entsteht am Ende die Zahl $\boxed{0}$, dann weiß man, dass -1 eine Nullstelle (Lösung) ist, und gleichzeitig erhält man die Koeffizienten für die Polynomdivision:

	1	7	14	8
x = - 1	0	-1	-6	-8
	1	6	8	$\boxed{0}$

Zwischenergebnis: $x^3 + 7x^2 + 14x + 2 = (x+1)(x^2 + 6x + 8)$

Zusammengesetzt erhält man das doppelte Horner-Schema:

	1	5	0	-20	-16
$x_1 = 2$	0	2	14	28	16
	1	7	14	8	$\boxed{0}$
x = - 1	0	-1	-6	-8	
	1	6	8	$\boxed{0}$	

Ergebnis: $(x-2)(x+1)\left(x^2 + 6x + 8\right) = 0$

In der Datei 18050 wird ein verkürztes doppeltes Horner-Schema gezeigt.

Beispiel 36 $2x^3 + 3x^3 - 12x^2 - 7x + 6 = 0$

1. Schritt: Entdecken der Probierlösungen $x_1 = -1$ und $x_2 = 2$
2. Schritt: Division durch $(x+1)(x-2)$

1. Methode: Polynomdivision

durch $(x+1)(x-2) = x^2 - x - 2$

$$
\begin{array}{l}
(2x^4 + 3x^3 - 12x^2 - 7x + 6) : (x^2 - x - 2) = 2x^2 + 5x - 3 \\
\underline{-(2x^4 - 2x^3 - 4x^2)} \\
\quad 5x^3 - 8x^2 - 7x \\
\quad \underline{-(5x^3 - 5x^2 - 10x)} \\
\qquad -3x^2 + 3x + 6 \\
\qquad \underline{-(-3x^2 + 3x + 6)} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

2. Methode: Doppeltes Horner-Schema:

	2	3	-12	-7	6
$x_1 = -1$	0	-2	-1	13	-6
	2	1	-13	6	$\boxed{0}$
$x_2 = 2$	0	4	10	-6	
	2	5	-3	$\boxed{0}$	

Faktorisierung der Gleichung:

$2x^4 + 3x^3 - 12x^2 - 7x + 6 = 0$ wird zu $(x+1)(x-2)(2x^2 + 5x - 3) = 0$

Restliche Lösungen: $2x^2 + 5x - 3 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25+24}}{4} = \frac{-5 \pm 7}{4} = \begin{cases} \frac{1}{2} \\ -3 \end{cases}$$

Die Lösungsmenge: $L = \left\{ \frac{1}{2}; -1; 2; -3 \right\}$

Beispiel 37 $x^4 - 23x^2 - 30x + 36 = 0$

Man findet als ganzzahlige Lösung <u>nur</u> $x_1 = -3$. Da man jedoch zwei Probierlösungen benötigt, um am Ende auf einen quadratischen Term zu kommen, überprüfen wir, ob diese Lösung -3 sogar als doppelte Lösung auftritt. Daher versuchen wir eine Polynomdivision durch $(x-3)^2 = (x^2 - 6x + 9)$:

$$
\begin{array}{l}
(x^4 + 0x^3 - 23x^2 - 30x + 36) : (x^2 + 6x + 9) = x^2 - 6x + 4 \\
\underline{-(x^4 + 6x^3 + 9x^2)} \\
\quad -6x^3 - 32x^2 - 30x \\
\quad \underline{-(-6x^3 - 36x^2 - 54x)} \\
\qquad 4x^2 + 24x + 36 \\
\qquad \underline{-(4x^2 + 24x + 36)} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Die Faktorisierung der Gleichung ergibt: $(x+3)^2 \cdot (x^2 - 6x + 4) = 0$

Restliche Lösungen: $x^2 - 6x + 4 = 0$

mit: $x_{2,3} = \frac{6 \pm \sqrt{36-16}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{20}}{2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{5}}{2} = \frac{6}{2} \pm \frac{2}{2}\sqrt{5} = 3 \pm \sqrt{5}$

Lösungsmenge: $L = \left\{ -3\ ;\ 3 + \sqrt{5}\ ; 3 - \sqrt{5} \right\}$

Ohne das Aufspüren der Tatsache, dass – 3 eine doppelte Lösung der Gleichung ist, findet man die Lösungsmenge nicht!

6 Ein Beispiel für eine Gleichung 5. Grades

Beispiel 32 $\boxed{x^5 - 2x^4 - x^3 + 2x^2 - 12x + 24 = 0}$

Nach den jetzt gemachten Erfahrungen muss man damit rechnen, dass man **drei Probierlösungen finden muss**, dann wird das Horner-Schema dreimal sukzessive durchgeführt, so dass am Ende ein quadratischer Term übrig bleibt. Doch es gibt auch Überraschungen.

1. Schritt: Entdecken der ersten Probierlösung $x_1 = 2$ und Abspaltung des Faktors $(x-2)$

mit Polynomdivision

$$
\begin{array}{l}
(x^5 - 2x^4 - x^3 + 2x^2 - 12x + 24) : (x-2) = (x^4 - x^2 - 12) \\
\underline{-(x^4 - 2x^4)} \\
\qquad -x^3 + 2x^2 \\
\qquad \underline{-(-x^3 + 2x^2)} \\
\qquad\qquad -12x + 24 \\
\qquad\qquad \underline{-(-12x + 24)} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

oder Horner-Schema

	1	-2	-1	2	-12	24
	0	2	0	-2	0	-24
$x_1 = 2$						
	1	0	-1	0	-12	$\boxed{0}$

Zwischenergebnis: $(x-2)(x^4 - x^2 - 12) = 0$

2.Schritt: Berechnung der restlichen Lösungen aus dem Faktor:

$$x^4 - x^2 - 12 = 0$$

Diese biquadratische Gleichung wird durch die Substitution $u = x^2$ zur quadratischen Gleichung:

$$u^2 - u - 12 = 0$$

$$u_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+48}}{2} = \frac{1 \pm 7}{2} = \begin{cases} 4 \\ -3 \end{cases}$$

Rücksubstitution: Aus $u_1 = x^2 = 4$ folgt: $x_{2,3} = \pm 2$

Die Gleichung $u_3 = x^2 = -3$ hat dagegen keine reelle Lösungszahl.

Ergebnis: Die Lösungsmenge ist $L = \{\, 2; -2 \,\}$, wobei 2 eine doppelte Lösung ist.

7. Aufgabenblatt

Bestimme die Lösungsmengen folgender Gleichungen:

Gleichungen 2. Grades

2.1	a)	$x^2+5x-6=0$	b)	$x^2-11x-1=0$
	c)	$2x^2+\frac{1}{3}x-5=0$	d)	$x^2+4x+6=0$
2.2	a)	$5x^2=30$	b)	$4x^2+12=0$
	c)	$\frac{1}{2}x^2-8=0$		
2.3	a)	$3x^2+8x=0$	b)	$-\frac{1}{8}x^2+\frac{2}{3}x=0$
	c)	$2x^2=25x$	d)	$\frac{3}{5}x^2+\frac{4}{3}x=0$
2.4	a)	$\frac{1}{3}x^2-2x=0$	b)	$3x^2-24=0$
	c)	$x^2+5x-14=0$	d)	$6x^2-11x-10=0$
	e)	$-\frac{1}{6}x^2+x+3=0$		

Gleichungen 3. Grades mit direkter Lösung

3.1.	a)	$x^3=64$	b)	$x^3+81=0$
	c)	$\frac{1}{4}x^3+2=0$		
3.2.	a)	$x^3-9x=0$	b)	$\frac{1}{4}x^3+2x=0$
	c)	$-\frac{1}{3}x^3+4x^2=0$		
3.3	a)	$x^3+2x^2-48x=0$	b)	$x^3+5x^2+8x=0$
	c)	$\frac{1}{2}x^3-3x^2+8x=0$	d)	$2x^3-\frac{1}{3}x^2+5x=0$
	e)	$\frac{1}{2}x^3+\frac{5}{12}x^2-\frac{1}{3}x=0$		

Gleichungen 3. Grades mit Probierlösung [in eckigen Klammern]

Aufgabe 3.4

Die Lösungen werden fast alle mit dem Horner-Schema durchgeführt.

a) $x^3 - x^2 - 17x - 15 = 0$ *[-1]*

b) $x^3 - x^2 - 8x + 12 = 0$ *[2]*

c) $x^3 - 7x^2 + x + 33 = 0$ *[3]* (Auch Polynomdivision)

d) $\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 3x + 2 = 0$ *[-2]*

e) $x^3 - 5x + 12 = 0$ *[-3]*

f) $2x^3 + \frac{5}{2}x^2 - \frac{11}{2}x + \frac{15}{8} = 0$ *[$\frac{1}{2}$]* (Auch Polynomdivision)

g) $3x^3 - 10x^2 + 9x - 2 = 0$ *[2]*

h) $2x^3 + x^2 - 25x + 12 = 0$ *[-4]* (Auch Polynomdivision)

i) $\frac{1}{4}x^3 - x^2 - x + 4 = 0$ *[2]*

j) $\frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{3}x - 1 = 0$ *[2]*

k) $\frac{1}{10}x^3 - \frac{19}{10}x + 3 = 0$ *[2]*

l) $\frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{3}x^2 - x - \frac{5}{9} = 0$ *[-1]*

m) $\frac{1}{3}x^3 + x^2 - 2x - \frac{8}{3} = 0$ *[-1]* (Auch Polynomdivision)

n) $-x^3 + 6x^2 - 12x + 9 = 0$ *[3]*

3.5 Anwendungsaufgaben:

a) Die Kurve mit der Gleichung $y = \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{3}x^2 - x - \frac{5}{9}$ hat die Gerade mit der Gleichung $y = 4x + \frac{76}{9}$ zur Tangente. Der Berührpunkt ist $B_1\left(-3 \mid -\frac{32}{9}\right)$.
In welchem Punkt schneiden sich Tangente und Kurve (noch einmal)?
(Vorwissen dazu: Eine Berührstelle ist eine Lösung der Schnittgleichung.)

b) Wo schneiden sich die Kurve K: $y = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + 3$ und die Gerade $y = \frac{1}{2}x$?

c) (Analogie-Aufgabe zu a)
Kurvengleichung: $y = -x^3 + 6x^2 - 12x + 9$, Tangente in $B(1|2)$ ist $y = -3x + 5$. Wo schneiden sich Tangente und Kurve?

Gleichungen 4. Grades mit direkter Lösung

4.1 a) $x^4 - 144 = 0$ b) $\frac{1}{2}x^4 + 8 = 0$

c) $-\frac{1}{8}x^4 + 50 = 0$

4.2 a) $\frac{1}{2}x^4 + 4x = 0$ b) $\frac{1}{4}x^4 - x^2 = 0$

c) $7x^4 + 2x^3 = 0$ d) $4x^4 - 121x^2 = 0$

e) $x^4 - 9x^3 - 10x^2 = 0$ f) $x^4 + x^3 + 2x^2 = 0$

g) $\frac{1}{4}x^4 - x^3 - \frac{3}{2}x^2 = 0$ h) $\frac{1}{2}x^4 + 3x^3 + \frac{5}{2}x^2 = 0$

4.3 a) $\frac{1}{2}x^4 - 9x^2 + 16 = 0$ b) $\frac{1}{2}x^4 - 95x^2 - 588 = 0$

c) $\frac{1}{8}x^4 - x^2 - 6 = 0$ d) $\frac{1}{16}x^4 - \frac{5}{4}x^2 + 6 = 0$

e) $-x^4 + 5x^2 - 4 = 0$ f) $3x^4 + 38x^2 - 160 = 0$

g) $-\frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + 4 = 0$ h) $\frac{1}{32}x^4 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{2} = 0$

Gleichungen 4. Grades mit Probierlösungen [in eckigen Klammern]

4.4 a) $x^4 - 6x^3 - 24x^2 + 134x - 105 = 0$ [1;3]

b) $x^4 - 13x^2 + 20x - 4 = 0$ [2 ist doppelte Lösung]

c) $x^4 + 3x^3 + 4x^2 - 12x - 32 = 0$ [2; - 2]

d) $\frac{2}{9}x^4 + \frac{5}{3}x^3 + 3x^2 - 3x - 9 = 0$ [- 3 ist doppelte Lösung]

e) $\frac{1}{12}x^4 - \frac{5}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + 9 = 0$ [- 3 ist doppelte Lösung]

f) $x^4 - 8x^3 - 8x^2 + 32x + 16 = 0$ [2; - 2]

g) $x^4 + 25x - 156 = 0$ [3; - 4] auch Pol.Div.

h) $x^4 + 5x^3 - 20x - 16 = 0$ [2; - 1]

i) $\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^3 - 2x^2 - 4x = 0$ [-2]

j) $\frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{6}x^3 + x - 6 = 0$ [2; -3]

k) $x^4 + 2x^3 - 11x^2 - 12x + 36 = 0$ [2; -3]

l) $\frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{9}{4} = 0$ [3] Lösung <u>auch</u> mit Polynomdivision

m) $\frac{1}{3}x^4 - \frac{4}{3}x^3 - \frac{2}{3}x^2 + 4x + 3 = 0$ [3 ; -1]

Gleichungen 5. Grades

5.1 a) $\frac{1}{20}x^5 - \frac{1}{5}x^4 = 0$ b) $\frac{1}{60}x^5 + \frac{1}{12}x^4 = 0$

c) $-\frac{4}{5}x^5 + 3x^3 = 0$ d) $-\frac{1}{10}x^5 + 2x = 0$

e) $-\frac{1}{4}x^5 - \frac{1}{2}x^4 + x^3 = 0$

5.2 a) $\frac{1}{8}x^5 - \frac{1}{4}x^3 - x = 0$ b) $\frac{1}{8}x^5 + \frac{1}{4}x^3 + x = 0$

c) $\frac{1}{10}x^5 - \frac{4}{3}x^3 + 6x = 0$ d) $\frac{1}{27}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + 3x = 0$

e) $\frac{1}{20}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + 4x = 0$

5.3 Gleichungen 5. Grades mit Probierlösungen [in eckigen Klammern]

a) $x^5 + 2x^4 - 8x^3 - 16x^2 - 48x - 96 = 0$ [- 2]

b) $x^5 + x^4 - x^3 - x^2 - 6x - 6 = 0$ [- 1]

c) $3x^5 - 30x^4 + 100x^3 - 120x^2 + 64 = 0$ [2]

Lösungsteil

Lösungen zu den quadratischen Gleichungen

Aufgabe 2.1

a) $x^2+5x-6=0 \qquad x_{1,2}=\dfrac{-5\pm\sqrt{25+24}}{2}=\dfrac{-5\pm7}{2}=\begin{cases}1\\-6\end{cases} \qquad L=\{1;-6\}$

b) $x^2-11x-1=0 \qquad x_{1,2}=\dfrac{11\pm\sqrt{121+4}}{2}=\dfrac{11\pm\sqrt{125}}{2}=\dfrac{11}{2}\pm\dfrac{5}{2}\sqrt5$

$L=\left\{\tfrac{11}{2}+\tfrac{5}{2}\sqrt5\,;\,\tfrac{11}{2}-\tfrac{5}{2}\sqrt5\right\}$

c) $2x^2+\tfrac13x-5=0 \iff 6x^2+x-15=0 \qquad x_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+360}}{12}=\dfrac{-1\pm19}{12}=\begin{cases}\tfrac32\\-\tfrac53\end{cases}$

$L=\left\{\tfrac32;-\tfrac53\right\}$

d) $x^2+4x+6=0 \qquad x_{1,2}=\dfrac{-4\pm\sqrt{16-24}}{2}\notin\mathbb{R} \qquad L=\{\ \}$

Aufgabe 2.2

a) $5x^2=30 \qquad x^2=6;\quad x_{1,2}=\pm\sqrt6 \qquad L=\{\pm\sqrt6\}$

b) $4x^2+12=0 \qquad x^2=-3 \Rightarrow x\notin\mathbb{R} \qquad L=\{\ \}$

c) $\tfrac12x^2-8=0 \qquad x^2=16 \qquad x_{1,2}=\pm4 \qquad L=\{\pm4\}$

Aufgabe 2.3

a) $3x^2+8x=0 \qquad x\cdot(3x+8)=0 \qquad L=\left\{0;-\tfrac83\right\}$

b) $-\tfrac18x^2+\tfrac23x=0 \qquad x\cdot\left(-\tfrac18x+\tfrac23\right)=0$

$x_1=0$ oder $-\tfrac18x=-\tfrac23 \iff x=\tfrac{16}{3} \qquad L=\left\{0;\tfrac{16}{3}\right\}$

c) $2x^2=25x \iff 2x^2-25x=0 \iff x\cdot(2x-25)=0 \qquad L=\left\{0;\tfrac{25}{2}\right\}$

Bei dieser Gleichung darf nicht durch x dividiert werden, sonst geht die Lösung $x_1 = 0$ verloren !!!

d) $\tfrac35x^2+\tfrac43x=0 \iff x\left(\tfrac35x+\tfrac43\right)=0 \qquad x_1=0$ und $x_2=-\tfrac43\cdot\tfrac53=-\tfrac{20}{9} \qquad L=\left\{0;-\tfrac{20}{9}\right\}$

Aufgabe 2.4

a) $\tfrac13x^2-2x=0\ |\cdot3$

$x^2-6x=0$

$x(x-6)=0$

$L=\{0;6\}$

b) $3x^2-24=0$

$x^2=8$

$x=\pm\sqrt8$

$L=\{\pm\sqrt8\}$

c) $x^2+5x-14=0$

$x_{1,2}=\dfrac{-5\pm\sqrt{25+56}}{2}=\dfrac{-5\pm9}{2}$

$x_1 = 2,\quad x_2 = -7$

$L=\{2;-7\}$

d) $6x^2-11x-10=0$

$x_{1,2}=\dfrac{11\pm\sqrt{121+240}}{12}=\dfrac{11\pm19}{12}=\begin{cases}\tfrac52\\-\tfrac23\end{cases}$

$L=\left\{\tfrac52;-\tfrac23\right\}$

e) $-\tfrac16x^2+x+3=0\ |\cdot(-3)$

$\tfrac12x^2-3x-9=0$

$x_{1,2}=3\pm\sqrt{9+18}=3\pm3\sqrt3$

$L=\{3\pm3\sqrt3\}$

Lösungen zu den Gleichungen 3. Grades

Aufgabe 3.1

a) $x^3 = 64 \qquad x = \sqrt[3]{64} = 4 \qquad L = \{4\}$

b) $x^3 + 81 = 0 \qquad x = -\sqrt[3]{81} = -\sqrt[3]{27 \cdot 3} = -3\sqrt[3]{3} \qquad L = \{-3\sqrt[3]{3}\}$

c) $\frac{1}{4}x^3 + 2 = 0 \qquad x^3 = -8 \qquad x = -2 \qquad L = \{-2\}$

Aufgabe 3.2

a) $x^3 - 9x = 0 \iff x\cdot(x^2-9) = 0 \iff x\cdot(x-3)(x+3) = 0 \quad L = \{0; \pm 3\}$

b) $\frac{1}{4}x^3 + 2x = 0 \iff x\cdot\left(\frac{1}{4}x^2 + 2\right) = 0 \qquad L = \{0\}$

(denn die Klammer wird nie Null: $\frac{1}{4}x^2 = -2 \Rightarrow x^2 = -8 \Rightarrow x \notin R$)

c) $-\frac{1}{3}x^3 + 4x^2 = 0 \iff x^2\cdot\left(-\frac{1}{3}x + 4\right) = 0 \qquad L = \{0; 12\}$

Aufgabe 3.3

a) $x^3 + 2x^2 - 48x = 0 \iff x\cdot(x^2 + 2x - 48) = 0$

$x_1 = 0 \qquad x_{2,3} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+192}}{2} = \frac{-2 \pm 14}{2} = \begin{cases} 6 \\ -8 \end{cases} \qquad L = \{0; 6; -8\}$

b) $x^3 + 5x^2 + 8x = 0 \iff x\cdot(x^2 + 5x + 8) = 0$

$x_1 = 0$ und $x^2 + 5x + 8 = 0 \iff x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25-32}}{2} \notin R$; $L = \{0\}$

c) $\frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + 8x = 0 \quad |\cdot 2$ ergibt $x^3 - 6x^2 + 16x = 0$

$x\cdot(x^2 - 6x + 16) = 0$ ergibt $x_1 = 0$ und $x_{2,3} = \frac{6 \pm \sqrt{36-48}}{2} \notin R \qquad L = \{0\}$

d) $2x^3 - \frac{1}{3}x^2 + 5x = 0 \quad |\cdot 3$ ergibt $x(6x^2 - x + 15) = 0$

mit $x_1 = 0$; $x_{2,3} = \frac{1 \pm \sqrt{1-360}}{12} \notin R \qquad L = \{0\}$

e) $\frac{1}{2}x^3 + \frac{5}{12}x^2 - \frac{1}{3}x = 0 \quad |\cdot 12$ ergibt $6x^3 + 5x^2 - 4x = 0$

und $x(6x^2 + 5x - 4) = 0$

mit $x_1 = 0$; $x_{2,3} = \frac{-5 \pm \sqrt{25+96}}{12} = \frac{-5 \pm 11}{12} = \begin{cases} \frac{1}{2} \\ -\frac{4}{3} \end{cases} \qquad L = \{0; \frac{1}{2}; -\frac{4}{3}\}$

3.4 Gleichungen 3. Grades mit Probierlösung [in eckigen Klammern]

a) $x^3 - x^2 - 17x - 15 = 0$ *[x_1 = -1]*

Ausklammern mittels Horner-Schema:

	1	-1	-17	-15
x = - 1	0	-1	2	15
	1	-2	-15	$\boxed{0}$

d.h. x_1 = - 1 ist eine Lösung.

Zwischenergebnis:

$$(x+1)\left(x^2 - 2x - 15\right) = 0$$

Restliche Lösungen

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+60}}{2} = \frac{2 \pm 8}{2} = \begin{cases} 5 \\ -3 \end{cases}$$

Lösungsmenge: $L = \{-1; 5; -3\}$

b) $x^3 - x^2 - 8x + 12 = 0$ *[x_1 = 2]*

Ausklammern mittels Horner-Schema:

	1	-1	-8	12
x = 2	0	2	2	-12
	1	1	-6	$\boxed{0}$

d.h. x_1 = 2 ist eine Lösung.

Zwischenergebnis:

$$(x-2)\left(x^2 + x - 6\right) = 0$$

Restliche Lösungen

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} = \begin{cases} 2 \\ -3 \end{cases}$$

Lösungsmenge: $L = \{2; -3\}$

2 ist eine doppelte Lösung !

c) $x^3 - 7x^2 + x + 33 = 0$ *[x_1= 3]*

Ausklammern mittels Horner-Schema:

	1	-7	1	33
x = 3	0	3	-12	-33
	1	-4	-11	$\boxed{0}$

d.h. x_1 = 3 ist eine Lösung.

Zwischenergebnis:

$$(x-3)\left(x^2 - 4x - 11\right) = 0$$

Restliche Lösungen

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16+44}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{15}}{2} = 2 \pm \sqrt{15}$$

Lösungsmenge: $L = \left\{3; 2 \pm \sqrt{15}\right\}$

Lösung durch Polynomdivision:

$x^3 - 7x^2 + x + 33 = 0$ Bekannte Lösung: x_1 = 3.

Ausklammern des Faktors (x-3) durch **Polynomdivision:**

$$\begin{array}{l}
(x^3 - 7x^2 + x + 33) : (x-3) = x^2 - 4x - 11 \\
-(x^3 - 3x^2) \\
\hline
\quad -4x^2 + x \\
\quad -\left(-4x^2 + 12x\right) \\
\hline
\qquad -11x + 33 \\
\qquad -\left(-11x + 33\right) \\
\hline
\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Produktform der Gleichung:

$$(x-3)\left(x^2 - 4x - 11\right) = 0$$

Restliche Lösungen

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16+44}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{15}}{2} = 2 \pm \sqrt{15}$$

Lösungsmenge: $L = \left\{3; 2 \pm \sqrt{15}\right\}$

d) $\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 3x + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = 0$ *[x_1 = - 2]*

Ausklammern mittels Horner-Schema:

	1	6	12	8
x = - 2	0	-2	-8	-8
	1	4	4	$\boxed{0}$

d.h. x_1 = - 2 ist eine Lösung.

Zwischenergebnis:

$$(x+2)(x^2+4x+4)=0$$

Restliche Lösungen

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-16}}{2} = -2 \qquad L = \{-2\}$$

-2 ist dreifache Lösung !

e) $x^3 - 5x + 12 = 0$ *[x_1 = -3]*

Ausklammern mittels Horner-Schema:

	1	**0**	-5	12
x = - 3	0	-3	9	-12
	1	-3	4	$\boxed{0}$

d.h. x_1 = - 3 ist eine Lösung.

Zwischenergebnis:

$$(x+3)(x^2-3x+4)=0$$

Restliche Lösungen

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-12}}{2} \notin R$$

Lösungsmenge: $L = \{-3\}$

f) $2x^3 + \frac{5}{2}x^2 - \frac{11}{2}x + \frac{15}{8} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 16x^3 + 20x^2 - 44x + 15 = 0$ *[$x_1 = \frac{1}{2}$]*

Ausklammern mittels Horner-Schema:

	16	20	-44	15
$x = \frac{1}{2}$	0	8	14	-15
	16	28	-30	$\boxed{0}$

d.h. $x_1 = \frac{1}{2}$ ist eine Lösung.

Zwischenergebnis:

$$\left(x+\tfrac{1}{2}\right)(16x^2+28x-30)=0$$

Restliche Lösungen

$$16x^2+28x-30=0 \quad |:4$$

$$4x^2+7x-\tfrac{15}{2}=0$$

$$x_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49+120}}{8} = \frac{-7 \pm 13}{8} = \begin{cases} \frac{3}{4} \\ -\frac{5}{2} \end{cases}$$

Lösungsmenge: $L = \left\{\tfrac{1}{2}; \tfrac{3}{4}; -\tfrac{5}{2}\right\}$

Ausklammern des Faktors $(x - \frac{1}{2})$ durch **Polynomdivision**:

$$\begin{array}{l}
(16x^3+20x^2-44x+15):(x-\tfrac{1}{2}) = 16x^2+28x-30 \\
\underline{-(16x^3-8x^2)} \\
\qquad 28x^2-44x \\
\qquad \underline{-(28x^2-14x)} \\
\qquad\qquad -30x+15 \\
\qquad\qquad \underline{-(-30x+15)} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Produktform der Gleichung: $\left(x+\tfrac{1}{2}\right)(16x^2+28x-30)=0$

g) $3x^3 - 10x^2 + 9x - 2 = 0$ *[x_1= 2]*

Ausklammern mittels Horner-Schema:

	3	-10	9	-2
	0	6	-8	2
$x_1 = 2$				
	3	- 4	1	$\boxed{0}$

d.h. $2 \in L$

Also gilt

$$(x-2)(3x^2 - 4x + 1) = 0$$

mit

$$x_{2,3} = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{6} = \frac{4 \pm 2}{6} = \begin{cases} 1 \\ \frac{1}{3} \end{cases}$$

Ergebnis: $L = \{1; 2; \frac{1}{3}\}$

h) $2x^3 + x^2 - 25x + 12 = 0$ *[x_1= -4]*

Ausklammern mit Horner-Schema:

	2	1	-25	12
	0	-8	28	-12
$x_1 = -4$				
	2	-7	3	$\boxed{0}$

d. h. $-4 \in L$

Also gilt

$$(x+4)(2x^2 - 7x + 3) = 0$$

mit

$$x_{2,3} = \frac{7 \pm \sqrt{49-24}}{4} = \frac{7 \pm 5}{4} = \begin{cases} 3 \\ \frac{1}{2} \end{cases}$$

L $= \{-4; 3; \frac{1}{2}\}$

Ausklammern des Faktors (x+4) durch **Polynomdivision**:

$$\begin{aligned}
&(2x^3 + x^2 - 25x + 12) : (x+4) = 2x^2 - 7x + 3 \\
&\underline{-(2x^3 + 8x^2)} \\
&\quad -7x^2 - 25x \\
&\quad \underline{-(-7x^2 - 28x)} \\
&\qquad 3x + 12 \\
&\qquad \underline{-(3x + 12)} \\
&\qquad\quad 0
\end{aligned}$$

Produktform der Gleichung: $(x+4)(2x^2 - 7x + 3) = 0$

Restliche Lösungen: $x_{2,3} = \frac{7 \pm \sqrt{49-24}}{4} = \frac{7 \pm 5}{4} = \begin{cases} 3 \\ \frac{1}{2} \end{cases}$

i) $\frac{1}{4}x^3 - x^2 - x + 4 = 0 \quad | \cdot 4$

$x^3 - 4x^2 - 4x + 16 = 0$

Horner-Schema mit x_1 = 2:

	1	-4	-4	16
	0	2	-4	-16
$\boxed{x = 2}$				
	1	-2	-8	$\boxed{0}$

Produktdarstellung der Gleichung

$$(x-2)(x^2 - 2x - 8) = 0$$

Es folgt $x_{2,3} = \frac{2 \pm \sqrt{4+32}}{2} = \frac{2 \pm 6}{2} = \begin{cases} 4 \\ -2 \end{cases}$ $L = \{2; 4; -2\}$

j) $\frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{3}x - 1 = 0 \quad | \cdot 12$ ergibt:

$x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = 0$

Laut Aufgabe soll $x_1 = 2$ eine Lösung sein.
Nachweis und Ausklammern von (x – 2) mittels Horner-Schema:

	1	3	-4	-12
$x = 2$	0	2	10	12
	1	5	6	$\boxed{0}$

Produktform der Gleichung

$(x-2)(x^2+5x+6) = 0$

Weitere Lösungen: $x_{2,3} = \frac{-5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \frac{-5 \pm 1}{2} = \begin{cases} -2 \\ -3 \end{cases}$

L = $\{\pm 2; -3\}$

k) $\frac{1}{10}x^3 - \frac{19}{10}x + 3 = 0 \quad | \cdot 10$

$x^3 \mathbf{+0x^2} - 19x + 30 = 0$ mit der gegebenen Lösung $x_1 = 2$.

Horner-Schema:
Produktform der Gleichung:

	1	0	-19	30
$x = 2$	0	2	4	-30
	1	2	-15	$\boxed{0}$

$(x-2)(x^2+2x-15) = 0$

Weitere Lösungen $x_{2,3} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+60}}{2} = \frac{-2 \pm 8}{2} = \begin{cases} 3 \\ -5 \end{cases}$

$L = \{2; 3; -5\}$

l) $\frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{3}x^2 - x - \frac{5}{9} = 0 \quad | \cdot 9$ ergibt:

$x^3 - 3x^2 - 9x - 5 = 0$

Probierlösung: x = - 1: Ausklammern von $(x+1)$ mittels Horner-Schema:

	1	-3	-9	-5
$x = -1$	0	-1	4	5
	1	-4	-5	$\boxed{0}$

$(x+1)(x^2-4x-5) = 0$

Weitere Lösungen: $x_{2,3} = \frac{4 \pm \sqrt{16+20}}{2} = \frac{4 \pm 6}{2} = \begin{cases} 5 \\ -1 \end{cases}$

$L = \{-1; 5\}$

m) $\frac{1}{3}x^3 + x^2 - 2x - \frac{8}{3} = 0 \quad | \cdot 3$

$x^3 + 3x^2 - 6x - 8 = 0$

Eine Probierlösung ist $x_1 = -1$.

Daher kann man den Linearfaktor (x+1) ausklammern, entweder durch Polynomdivision oder mit dem Horner-Schema:

$$
\begin{array}{l}
(x^3 + 3x^2 - 6x - 8) : (x+1) = x^2 + 2x - 8 \\
-(x^3 + x^2) \\
\hline
\quad 2x^2 - 6x \\
\quad -\left(2x^2 + 2x\right) \\
\hline
\qquad -8x - 8 \\
\qquad -(-8x - 8) \\
\hline
\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

	1	3	−6	−8
	0	−1	−2	8
$x = -1$				
	1	2	−8	$\boxed{0}$

Beide liefern diese Produktdarstellung: $(x+1)(x^2 + 2x - 8) = 0$

Die zweite Klammer liefert $x_{2,3} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+32}}{2} = \frac{-2 \pm 6}{2} = \begin{cases} 2 \\ -4 \end{cases}$

$L = \{-1; 2; -4\}$.

n) $-x^3 + 6x^2 - 12x + 9 = 0$

Man kann die Lösung $x_1 = 3$ finden.

Ausklammern von (x - 3) durch Horner-Schema:

	-1	6	-12	9
	0	-3	9	-9
x = 3				
	-1	3	-3	$\boxed{0}$

Also folgt (x - 3)(- x^2 + 3x - 3) = 0 mit $x_N = \frac{-3 \pm \sqrt{9-12}}{-2} \notin R$

Einzige Lösung ist daher $x_1 = 3$: $L = \{3\}$.

Wie man sieht, hat diese Funktion nur eine Nullstelle, eben 3 !!!

Aufgabe 3.5: Anwendungen

a) Die Kurve mit der Gleichung $y = \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{3}x^2 - x - \frac{5}{9}$ hat die Gerade mit der Gleichung $y = 4x + \frac{76}{9}$ zur Tangente. Der Berührpunkt ist $B_1\left(-3 \,|\, -\frac{32}{9}\right)$.
In welchem Punkt schneiden sich Tangente und Kurve (noch einmal) ?
(Vorwissen dazu: Eine Berührstelle ist eine Lösung der Schnittgleichung.)

Lösung

Schnittgleichung: $\frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{3}x^2 - x - \frac{5}{9} = 4x + \frac{76}{9} \quad |\cdot 9$

$$x^3 - 3x^2 - 9x - 5 = 36x + 76$$
$$x^3 - 3x^2 - 45x - 81 = 0$$

Bekannte doppelte Lösung ist die Berührstelle - 3.

Ausklammern von $(x+3)^2$ mit dem doppelten Horner-Schema :

	1	-3	-45	-81
	0	-3	18	81
$x=-3$				
	1	-6	-27	$\boxed{0}$
	0	-3	27	
$x=-3$				
	1	-9	$\boxed{0}$	

Ausklammern mit dem verkürzten doppelten Horner-Schema:
mit $(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$

	1	-3	-45	-81
$\boxed{-9}$	0	0	-9	81
$\boxed{-6}$	0	-6	54	$\boxed{0}$
	1	-9	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$

ergibt $(x+3)^2(x-9) = 0$

Die gesuchte Schnittstelle ist somit $x_S = 9$ mit $y_S = 36 + \frac{76}{9} = \frac{400}{9}$

Ergebnis: $S\left(9 \,|\, \frac{400}{9}\right)$.

b) Wo schneiden sich die Kurve K: $y = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + 3$ und die Gerade $y = \frac{1}{2}x$?

Lösung

Schnittgleichung: $\frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + 3 = \frac{1}{2}x \quad |\cdot 8$

$x^3 - 6x^2 + 24 = 4x$

Ordnen: $x^3 - 6x^2 - 4x + 24 = 0$

Probierlösung ist x = 2.

Ausklammern des Linearfaktors (x – 2) durch:

Polynomdivision oder Horner-Schema:

$$\begin{array}{l}
(x^3 - 6x^2 - 4x + 24) : (x-2) = x^2 - 4x - 12 \\
-(x^3 + 2x^2) \\
\hline
\quad -4x^2 - 4x \\
\quad -\left(-4x^2 + 8x\right) \\
\hline
\qquad -12x - 24 \\
\qquad -(-12x - 24) \\
\hline
\qquad\qquad 0
\end{array}$$

	1	−6	−4	24
$x=2$	0	2	−8	−24
	1	−4	−12	$\boxed{0}$

Man erhält $(x-2)\left(x^2 - 4x - 12\right) = 0$ mit den weiteren Lösungen

$$x_{2,3} = \frac{4 \pm \sqrt{16+48}}{2} = \frac{4 \pm 8}{2} = \begin{cases} 6 \\ -2 \end{cases}.$$

Die drei Schnittpunkte ergeben sich daher zu $W(2\,|\,1)$; $S_1(6\,|\,3)$; $S_2(-2\,|\,-1)$.

c) (Analogie-Aufgabe zu a)

Kurvengleichung: $y = -x^3 + 6x^2 - 12x + 9$, Tangente in $B(1|2)$ ist $y = -3x + 5$. Wo schneiden sich Tangente und Kurve ?

Lösung

Schnittgleichung: $-x^3 + 6x^2 - 12x + 9 = -3x + 5$

Geordnet: $-x^3 + 6x^2 - 9x + 4 = 0$

Die Berühr<u>stelle</u> ist eine bekannte doppelte Lösung dieser Gleichung.

Daher kann man den Linearfaktor (x – 1) zweifach ausklammern.

Anwendung des doppelten Horner-Schemas:

	-1	6	-9	4
	0	-1	5	-4
$x=1$				
	-1	5	-4	$\boxed{0}$
	0	-1	4	
$x=1$				
	-1	4	$\boxed{0}$	

Anwendung des verkürzten doppelten Horner-Schemas:

Mit $(x-1)^2 = (x^2 - 2x + 1)$ folgt:

	-1	6	-9	4
$\boxed{-1}$	0	0	1	-4
$\boxed{+2}$	0	-2	8	$\boxed{0}$
	-1	4	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$

Beide Verfahren liefern die Produktform:

$(x-1)^2 \cdot (-x+4) = 0$

Also ist die gesuchte Lösung (letzte Klammer): $x_2 = 4$.

Der Schnittpunkt ist daher $S(4|-7)$.

Lösungen zu den Gleichungen 4. Grades

Aufgabe 4.1

a) $x^4 - 144 = 0 \qquad x_{1,2} = \pm\sqrt[4]{144} = \pm\sqrt[4]{12^2} = \pm\sqrt{12} \qquad L = \left\{\pm\sqrt{12}\right\} = \left\{\pm 2\sqrt{3}\right\}$

b) $\frac{1}{2}x^4 + 8 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^4 = -16 \qquad x \notin R \quad \Rightarrow \qquad L = \{\ \}$

c) $-\frac{1}{8}x^4 + 50 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^4 = 400 \qquad x_{1,2} = \pm\sqrt[4]{400} = \pm\sqrt[4]{16\cdot 25} = \pm 2\sqrt[4]{5^2} = \pm 2\sqrt{5}$

oder so:

$-\frac{1}{8}x^4 + 50 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^4 = 400 \quad \Leftrightarrow \quad x^4 = 20^2 \qquad x_{1,2} = \pm\sqrt{20} = \pm 2\sqrt{5} \qquad L = \left\{\pm 2\sqrt{5}\right\}$

Aufgabe 4.2

a) $\frac{1}{2}x^4 + 4x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x\cdot\left(\frac{1}{2}x^3 + 4\right) = 0$

$x_1 = 0, \quad \frac{1}{2}x^3 = -4 \quad \Leftrightarrow \quad x^3 = -8$ also $x_2 = -\sqrt[3]{8} = -2 \qquad L = \{0; -2\}$

b) $\frac{1}{4}x^4 - x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2\cdot\left(\frac{1}{4}x^2 - 1\right) = 0$

$x_1 = 0$ doppelte Lösung, $x^2 = 4$ d.h. $x_{2,3} = \pm 2 \qquad L = \{\pm 2; 0\}$

c) $7x^4 + 2x^3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^3\cdot(7x + 2) = 0$

$x_1 = 0$ dreifache Lösung, $x_2 = -\frac{2}{7}$ ergibt $\qquad L = \left\{0; -\frac{2}{7}\right\}$

d) $4x^4 - 121x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2(4x^2 - 121) = 0$

$x_1 = 0$ doppelte Lösung, $x^2 = \frac{121}{4}$, also $x_{2,3} = \pm\frac{11}{2} \qquad L = \left\{0; -\frac{11}{2}\right\}$

e) $x^4 - 9x^3 - 10x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2\left(x^2 - 9x - 10\right) = 0$

$x_1 = 0$ ist doppelte Lösung; $x_{2,3} = \dfrac{9 \pm \sqrt{81 + 40}}{2} = \dfrac{9 \pm 11}{2} = \begin{cases} 10 \\ -1 \end{cases} \qquad L = \{0; 10; -1\}$

f) $x^4 + x^3 + 2x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2\cdot\left(x^2 + x + 2\right) = 0$

$x_1 = 0$ ist doppelte Lösung; $x_{2,3} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 - 4}}{2} \notin R \qquad L = \{0\}$

g) $\frac{1}{4}x^4 - x^3 - \frac{3}{2}x^2 = 0 \quad |\cdot 4 \qquad x^4 - 4x^3 - 6x^2 = 0$ und $x^2\left(x^2 - 4x - 6\right) = 0$

$x_1 = 0$ ist doppelte Lösung. Restliche Lösungen aus $\left(x^2 - 4x - 6\right) = 0$:

$x_{2,3} = \dfrac{4 \pm \sqrt{16 + 24}}{2} = \dfrac{4 \pm \sqrt{40}}{2} = \dfrac{4 \pm 2\sqrt{10}}{2} = 2 \pm \sqrt{10} \qquad L = \left\{0; 2 \pm \sqrt{10}\right\}$

h) $x^2\cdot\left(\frac{1}{2}x^2 + 3x + \frac{5}{2}\right) = 0$

$x_1 = 0$ doppelte Lösung (Berührung)

$x_{2,3} = -3 \pm \sqrt{9 - 4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{2}} = -3 \pm 2 = \begin{cases} -1 \\ -5 \end{cases} \qquad L = \{0; -1; -5\}$

Aufgabe 4.3: Biquadratische Gleichungen !

Lösungen ohne Substitution. Stattdessen wird die biquadratische Gleichung als quadratische Gleichung für x^2 aufgefasst.

a) $\frac{1}{2}x^4 - 9x^2 + 16 = 0 \qquad x^2 = 9 \pm \sqrt{81-32} = 9 \pm 7 = \begin{cases} 16 \\ 2 \end{cases}$

Aus $x^2 = 16$ folgt $x_{1,2} = \pm 4$

aus $x^2 = 2$ folgt $x_{3,4} = \pm\sqrt{2}$ $\qquad L = \left\{\pm\sqrt{2}\,;\pm 4\right\}$

b) $\frac{1}{2}x^4 - 95x^2 - 588 = 0$

$$x^2 = 95 \pm \sqrt{9025+1176} = 95 \pm \sqrt{10201} = 95 \pm 101 = \begin{cases} 196 \\ -6 \end{cases}$$

Aus $x^2 = 196$ folgt $x_{1,2} = \pm 14$

aus $x^2 = -6$ folgt keine reelle Zahl. $\qquad L = \{14; -14\}$

c) $\frac{1}{8}x^4 - x^2 - 6 = 0 \quad |\cdot 4 \quad !!!$

$\frac{1}{2}x^4 - 4x^2 - 24 = 0$

$$x^2 = 4 \pm \sqrt{16+48} = 4 \pm 8 = \begin{cases} 12 \\ -4 \end{cases}$$

Aus $x^2 = 12$ folgt $x_{1,2} = \pm\sqrt{12} = \pm 2\sqrt{3}$

Aus $x^2 = -4$ folgt $x \notin R$ $\qquad L = \left\{\pm 2\sqrt{3}\right\}$

d) $-x^4 + 5x^2 - 4 = 0 \,\big|\cdot(-1)$

$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

$$x^2 = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} = \begin{cases} 4 \\ 1 \end{cases}$$

Aus $x^2 = 4$ folgt: $\qquad x_{1,2} = \pm 2$

Aus $x^2 = 1$ folgt: $\qquad x_{3,4} = \pm 1$ $\qquad \mathbf{L} = \{\pm 1; \pm 2\}$

e) $3x^4 + 38x^2 - 160 = 0$

$$x^2 = \frac{-38 \pm \sqrt{1444+1920}}{6} = \frac{-38 \pm \sqrt{3364}}{6} = \frac{-38 \pm 58}{6} = \begin{cases} \frac{10}{3} \\ -16 \end{cases}$$

Aus $x^2 = \frac{10}{3} \;\Rightarrow\; x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{10}{3}} = \pm\sqrt{\frac{30}{9}} = \pm\frac{1}{3}\sqrt{30}$

Aus $x^2 = -16$ folgt $x_{3,4} \notin R$ $\qquad \mathbf{L} = \left\{\pm\sqrt{\frac{10}{3}}\right\}$

f) $\frac{1}{16}x^4 - \frac{5}{4}x^2 + 6 = 0$

$\frac{1}{16}x^4 - \frac{5}{4}x^2 + 6 = 0 \quad |\cdot 8 \quad !!!$

$\frac{1}{2}x^4 - 10x^2 + 48 = 0$

$$x^2 = 10 \pm \sqrt{100 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 48} = 10 \pm \sqrt{100 - 96}$$

$$x^2 = 10 \pm 2 = \begin{cases} 12 \\ 8 \end{cases}$$

Aus $x^2 = 12 \Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{12}$

Aus $x^2 = 8 \Rightarrow x_{3,4} = \pm\sqrt{8}$

$L = \left\{\pm\sqrt{12}\,; \pm\sqrt{8}\right\} = \left\{\pm 3\sqrt{2}\,; \pm 2\sqrt{2}\right\}$

g) $-\frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + 4 = 0 \quad | \cdot(-4)$

$\frac{1}{2}x^4 - 2x^2 - 16 = 0$

$$x^2 = 2 \pm \sqrt{4 + 32} = 2 \pm 6 = \begin{cases} 8 \\ -4 \end{cases}$$

Aus $x^2 = 8 \Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{8}$

Aus $x^2 = -4 \Rightarrow x_{3,4} \notin R$.

$L = \left\{ \pm\sqrt{8} \right\} = \left\{\pm 2\sqrt{2}\right\}$

h) $\frac{1}{32}x^4 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{2} = 0 \quad | \cdot 32$

$x^4 - 24x^2 + 144 = 0$

$$x^2 = \frac{24 \pm \sqrt{24^2 - 4 \cdot 144}}{2} = \frac{24 \pm \sqrt{0}}{2} = 12$$

also wird $x = \pm\sqrt{12} = \pm 2\sqrt{3}$

$L = \left\{ \pm\sqrt{12} \right\} = \left\{\pm 2\sqrt{3}\right\}$

Aufgabe 4.4: *Gleichungen 4. Grades mit Probierlösungen*

a) $x^4 - 6x^3 - 24x^2 + 134x - 105 = 0$

Bestätigung der Probierlösungen $x_1 = 1$ und $x_2 = 3$
und Ausklammern der Linearfaktoren $(x - 1)$ und $(x - 3)$:

Doppeltes Horner-Schema:

	1	-6	-24	134	-105
	0	1	-5	-29	105
$x_1 = 1$					
	1	-5	-29	105	$\boxed{0}$
	0	3	-6	-105	
$x_2 = 3$					
	1	-2	-35	$\boxed{0}$	

Zwischenergebnis:
$$(x-1)(x-3)(x^2-2x-35)=0$$

Restliche Lösungen
$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+140}}{2} = \frac{2 \pm 12}{2} = \begin{cases} 7 \\ -5 \end{cases}$$

Lösungsmenge: $L = \{1;3;7;-5\}$

b) $x^4 - 13x^2 + 20x - 4 = 0$

Bestätigung, dass 2 eine doppelte Lösung ist und Ausklammern von $(x-2)^2$:

Doppeltes Horner-Schema:

	1	0	-13	20	-4
	0	2	4	-18	4
$x_1 = 2$					
	1	2	-9	2	$\boxed{0}$
	0	2	8	-2	
$x_2 = 2$					
	1	4	-1	$\boxed{0}$	

Zwischenergebnis:
$$(x-2)^2(x^2+4x-1)=0$$

Restliche Lösungen
$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16+4}}{2} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{5}}{2} = -2 \pm \sqrt{5}$$

Lösungsmenge: $L = \{2; -2 \pm \sqrt{5}\}$

c) $x^4 + 3x^3 + 4x^2 - 12x - 32 = 0$ [2; - 2]

Bestätigung der Lösungen 2 und –2 und Ausklammern von $(x-2)(x+2)$:

Doppeltes Horner-Schema:

	1	3	4	-12	-32
	0	2	10	28	32
$x_1 = 2$					
	1	5	14	16	$\boxed{0}$
	0	-2	-6	-16	
$x_2 = -2$					
	1	3	8	$\boxed{0}$	

Zwischenergebnis:
$$(x-2)(x+2)(x^2+3x+8)=0$$

Restliche Lösungen
$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-32}}{2} \notin R$$

Lösungsmenge: $L = \{2;-2\}$

Zur Polynomdivision siehe nächste Seite.

Wenn man bei Gleichungen 4. Grades zwei Linearfaktoren ausklammern muss, dann sollte man dies in einem Schritt tun, und nicht zwei Divisionen nacheinander durchführen.

Umständliche Methode mit zwei Divisionen:

1. Schritt: Zuerst Division durch (x – 2):

$$
\begin{array}{l}
\left(x^4+3x^3+4x^2-12x-32\right):\left(x-2\right)=x^3+5x^2+14x+16 \\
-\left(x^4-2x^3\right) \\
\hline
\quad 5x^3+4x^2 \\
\quad -\left(5x^3-10x^2\right) \\
\hline
\qquad 14x^2-12x \\
\qquad -\left(14x^2-28x\right) \\
\hline
\qquad\quad 16x-32 \\
\qquad\quad -\left(16x-32\right) \\
\hline
\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Zwischenergebnis:

$$(x^4+3x^3+4x^2-12x-32)=(x-2)\cdot(x^3+5x^2+14x+16)$$

2. Schritt: Dann Division durch (x + 2):

$$
\begin{array}{l}
\left(x^3+5x^2+14x+16\right):\left(x+2\right)=x^2+3x+8 \\
-\left(x^3+2x^2\right) \\
\hline
\quad 3x^2+14x \\
\quad -\left(3x^2+6x\right) \\
\hline
\qquad 8x+16 \\
\qquad -\left(8x+16\right) \\
\hline
\qquad\quad 0
\end{array}
$$

Endergebnis:

$$\left(x-2\right)\left(x+2\right)\left(x^2+3x+8\right)=0$$

Es geht jedoch schneller, wenn man die beiden Linearfaktoren zusammenrechnet $\left(x-2\right)\left(x+2\right)=x^2-4$ und dann die beiden Divisionen auf einmal durchführt:

$$
\begin{array}{l}
\left(x^4+3x^3+4x^2-12x-32\right):\left(x^2-4\right)=x^2+3x+8 \\
-\left(x^4 \qquad -4x^2\right) \\
\hline
\quad 3x^3+8x^2-12x \\
\quad -\left(3x^3 \qquad -12x\right) \\
\hline
\qquad 8x^2 \qquad -32 \\
\qquad -\left(8x^2 \qquad -32\right) \\
\hline
\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Ergebnis: $(x^2-4)\cdot(x^2+3x+8)=0$

bzw. $\left(x-2\right)\left(x+2\right)\left(x^2+3x+8\right)=0$

d) $\frac{2}{9}x^4 + \frac{5}{3}x^3 + 3x^2 - 3x - 9 = 0 \;|\cdot 9 \quad \Leftrightarrow \quad 2x^4 + 15x^3 + 27x^2 - 27x - 81 = 0$

Bestätigung, dass -3 eine doppelte Lösung ist und Ausklammern von $(x+3)^2$:

Doppeltes Horner-Schema:

	2	15	27	-27	-81
$x_1 = -3$	0	-6	-27	0	81
	2	9	0	-27	$\boxed{0}$
$x_2 = -3$	0	-6	-9	27	
	2	3	-9	$\boxed{0}$	

Zwischenergebnis:

$$(x+3)^2\left(2x^2 + 3x - 9\right) = 0$$

Restliche Lösungen

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+72}}{4} = \frac{-3 \pm 9}{4} = \begin{cases} \frac{3}{2} \\ -3 \end{cases}$$

- 3 ist also dreifache Lösung !

Lösungsmenge: $L = \left\{-3; \frac{3}{2}\right\}$

e) $\frac{1}{12}x^4 - \frac{5}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + 9 = 0 \quad |\cdot 12 \quad \Leftrightarrow \quad x^4 + 0x^3 - 15x^2 + 18x + 108 = 0$

Bestätigung, dass -3 eine doppelte Lösung ist und Ausklammern von $(x+3)^2$:

Doppeltes Horner-Schema:

	1	0	-15	18	108
$x_1 = -3$	0	-3	9	18	-108
	1	-3	-6	36	$\boxed{0}$
$x_2 = -3$	0	-3	18	-36	
	1	-6	12	$\boxed{0}$	

Zwischenergebnis:

$$(x+3)^2(x^2 - 6x + 12) = 0$$

Restliche Lösungen

$$x_{2,3} = \frac{6 \pm \sqrt{36-48}}{2} \notin R$$

Lösungsmenge: $L = \{-3\}$

f) $x^4 - 8x^3 - 8x^2 + 32x + 16 = 0$ mit $x_{1,2} = \pm 2$

Doppeltes Horner-Schema:

	1	-8	-8	32	16
$x_1 = 2$	0	2	-12	-40	-16
	1	-6	-20	-8	$\boxed{0}$
$x_2 = -2$	0	-2	16	8	
	1	-8	-4	$\boxed{0}$	

Zwischenergebnis:

$$(x+2)(x-2)(x^2 - 8x - 4) = 0$$

Restliche Lösungen:

$$x_{3,4} = \frac{8 \pm \sqrt{64+16}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{80}}{2}$$

$$x_{3,4} = \frac{8 \pm 4\sqrt{5}}{2} = 4 \pm 2\sqrt{5}$$

Lösungsmenge $\mathbf{L} = \left\{\pm 2; 4 \pm 2\sqrt{5}\right\}$

g) $x^4 + 25x - 156 = 0$ mit $x_1 = 3$; $x_2 = -4$

Doppeltes Horner-Schema:

	1	0	0	25	-156
	0	3	9	27	156
$x_1 = 3$					
	1	3	9	52	$\boxed{0}$
	0	-4	4	-52	
$x_2 = -4$					
	1	-1	13	$\boxed{0}$	

Polynomdivision durch $(x-3)(x+4) = x^2 + x - 12$

$$
\begin{array}{l}
(x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 25x + 156) : (x^2 + x - 12) = x^2 - x + 13 \\
-(x^4 - x^3 - 12x^2) \\
\quad x^3 + 12x^2 + 25x \\
\quad -(x^3 - \ x^2 + 12x) \\
\qquad 13x^2 + 13x + 156 \\
\qquad -(13x^2 + 13x + 156) \\
\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Zwischenergebnis: $(x-3)(x+4)(x^2 - x + 13) = 0$

Restliche Lösungen: $x_{3,4} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 13}}{2} \notin \mathbf{R}$ $\quad \mathbf{L} = \{3; -4\}$

h) $x^4 + 5x^3 - 20x - 16 = 0$ mit $x_1 = 2$ und $x_2 = -1$

Doppeltes Horner-Schema zum Ausklammern von (x - 2) und (x+1):

	1	5	0	-20	-16
	0	2	14	28	16
$x_1 = 2$					
	1	7	14	8	$\boxed{0}$
	0	-1	-6	-8	
$x_2 = -1$					
	1	6	8	$\boxed{0}$	

Zwischenergebnis:

$(x-2)(x+1)(x^2 + 6x + 8) = 0$

Restliche Lösungen:

$$x_{3,4} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2} = \begin{cases} -2 \\ -4 \end{cases}$$

Lösungsmenge:

$\mathbf{L} = \{2; -1; -2; -4\}$

i) $\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^3 - 2x^2 - 4x = 0$

Weil das Absolutglied fehlt, wird zuerst x ausgeklammert, was $x_1 = 0$ als erste Nullstelle ergibt. Zugleich beseitigt man die Brüche durch Multiplikation mit 4:

$x(x^3 + 2x^2 - 8x - 16) = 0$

Weitere Nullstelle ist $x_2 = -2$, also wird man aus dem Klammerterm (x + 2) abspalten:

Horner-Schema:

	1	2	-8	-16
	0	-2	0	16
$x = -2$				
	1	0	-8	$\boxed{0}$

Produktdarstellung: $x \cdot (x+2)(x^2 - 8) = 0$

Restliche Lösungen: Aus $x^2 = 8$ folgt $x_{3,4} = \pm\sqrt{8}$

Lösungsmenge: $L = \{0; -2 : \pm\sqrt{8}\}$

j) $\frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{6}x^3 + x - 6 = 0 \;\big|\cdot 6$ d.h. $x^4 + x^3 + 6x - 36 = 0$ (1)

Probierlösung sind 2 und - 3, was man mit Horner-Schema oder durch Einsetzen beweisen kann. Ausklammern von $(x-2)(x+3)$

mit dem doppelten Horner-Schema zu (1)

	1	1	0	6	-36
	0	2	6	12	36
$x=2$	1	3	6	18	$\boxed{0}$
	0	-3	0	-18	
$x=-3$	1	0	6	$\boxed{0}$	

Verwendung des verkürzten doppelten Horner-Schemas für Experten: (Siehe 18050).

$(x-2)(x+3) = x^2 + 1\cdot x - 6$

	1	1	0	6	-36
$+6$	0	0	6	0	36
-1	0	-1	0	-6	$\boxed{0}$
	1	0	6	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$

Produktform: $(x-2)(x+3)(x^2+6) = 0$.

Die Gleichung $x^2 + 6 = 0$ hat keine reellen Lösungen, also folgt $L = \{2; -3\}$

k) $x^4 + 2x^3 - 11x^2 - 12x + 36 = 0$

Probierlösung sind 2 und - 3, was man mit Horner-Schema oder Einsetzen beweisen kann. Ausklammern von $(x-2)(x+3)$

mit dem doppelten Horner-Schema zu (1):

	1	2	-11	-12	36
	0	2	8	-6	-36
$x=2$	1	4	-3	-18	$\boxed{0}$
	0	-3	-3	18	
$x=-3$	1	1	- 6	$\boxed{0}$	

Verwendung des verkürzten doppelten Horner-Schemas für Experten: (Siehe 18050).

$(x-2)(x+3) = x^2 + 1\cdot x - 6$

	1	2	-11	-12	36
$+6$	0	0	6	6	-36
-1	0	-1	-1	6	$\boxed{0}$
	1	1	-6	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$

Produktdarstellung der Gleichung: $(x-2)(x+3)(x^2+x-6) = 0$

Weitere Lösungen aus $x^2 + x - 6 = 0$: $x_{3,4} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} = \begin{cases} 2 \\ -3 \end{cases}$

Also sind $x_1 = 2$ und $x_2 = -3$ sogar doppelte Lösungen der Gleichung:

Lösungsmenge: $L = \{2; -3\}$

I) $\frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{9}{4} = 0 \quad | \cdot 12$ also $x^4 - 4x^3 + 0x^2 + 0x + 27 = 0 \quad (*)$

Einzige angegebene Lösung ist x = 3.

Da wir auf einen quadratischen Term kommen müssen, müssen wir entweder eine weitere Nullstelle finden oder zeigen, dass 3 sogar eine doppelte Lösung ist.

Dies zeige ich, indem ich das Horner-Schema entweder doppelt anwendet oder doppelt verkürzt.

1. Methode:
Doppeltes Horner-Schema:
Ausklammern von $(x-3)^2 = (x^2 - 6x + 9)$

	1	−4	0	0	27
x = 3	0	3	−3	−9	−27
	1	−1	−3	−9	$\boxed{0 = f(3)}$
x = 3	0	3	6	9	
	1	2	3	$\boxed{0}$	

2. Methode: Vereinfachtes Doppeltes Horner-Schema:

	1	−4	0	0	27
$\boxed{-9}$	0	0	−9	−18	−27
$\boxed{6}$	0	6	12	18	$\boxed{0}$
	1	2	3	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$

Das Ergebnis beider Rechnungen ist $(x-3)^2 \cdot (1x^2 + 2x + 3) = 0$
wobei die Koeffizienten des quadratischen Klammerterms aus der jeweils untersten Zeile des Horner-Schemas stammen.

Weitere Lösungen: $x^2 + 2x + 3 = 0$ mit $x = \frac{-2 \pm \sqrt{4-12}}{2} \notin R$.

Es gibt also nur die (doppelte) reelle Lösung x = 3.

Lösungsmenge: $\mathbf{L} = \{3\}$

Zum Vergleich **Polynomdivision**:

Zuerst die hintereinander doppelt ausgeführte Division:

$$
\begin{array}{l}
(x^4 - 4x^3 + 0x^2 + 0x + 27) : (x-3) = x^3 - x^2 - 3x - 9 \\
\underline{-(x^4 - 3x^3)} \\
\quad -x^3 + 0x^2 \\
\quad \underline{-(-x^3 + 3x^2)} \\
\qquad -3x^2 + 0x \\
\qquad \underline{-(-3x^2 + 9x)} \\
\qquad\qquad -9x + 27 \\
\qquad\qquad \underline{-(-9x + 27)} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Also kann man durch Ausklammern die Gleichung so schreiben:
$(x-3)(x^3 - x^2 - 3x - 9) = 0$
Die zweite Klammer soll nun weitere Nullstellen liefern. Da sie 3. Grades ist, braucht man auch hier eine Probierlösung, so dass ein weiterer Linearfaktor ausgeklammert werden kann.

Die einzige Probierlösung, die man für die Gleichung $x^3 - x^2 - 3x - 9 = 0$ finden kann ist nochmals die Zahl 3 (damit wird 3 zu einer doppelten Lösung!).
Erneute Polynomdivision durch den Faktor (x - 3):

$$
\begin{array}{l}
(x^3 - x^2 - 3x - 9) : (x-3) = x^2 + 2x + 3 \\
-(x^3 - 3x^2) \\
\hline
\quad 2x^2 - 3x \\
\quad -(2x^2 - 6x) \\
\hline
\qquad 3x - 9 \\
\qquad -(3x-9) \\
\hline
\qquad\quad 0
\end{array}
$$

Das Ergebnis dieser Division ist
$(x^3 - x^2 - 3x - 9) = (x-3)(x^2 + 2x + 3)$
Nehmen wir die erste Ausklammerung dazu, dann hat Gleichung unsere Nullstellengleichung diese Form:

$$(x-3)(x-3)(x^2 - 2x + 3) = 0$$

Nun die **verkürzte doppelte Division** durch $(x-3)^2 = (x^2 - 6x + 9)$

$$
\boxed{
\begin{array}{l}
(x^4 - 4x^3 + 0x^2 + 0x + 27) : (x^2 - 6x + 9) = x^2 + 2x + 3 \\
-(x^4 - 6x^3 + 9x^2) \\
\hline
\quad 2x^3 - 9x^2 + 0x \\
\quad -(2x^3 - 12x^2 + 18) \\
\hline
\qquad 3x^2 - 18x + 27 \\
\qquad -(3x^2 - 18x + 27) \\
\hline
\qquad\qquad 0
\end{array}
}
$$

Die meisten finden, dass daneben die Arbeit mit dem Horner-Schema einfacher ist.

m) $\frac{1}{3}x^4 - \frac{4}{3}x^3 - \frac{2}{3}x^2 + 4x + 3 = 0 \quad | \cdot 3$

$x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x + 9 = 0$

Durch Probieren kann man etwa diese Lösungen finden: 3 und -1.

Abspaltung der Linearfaktoren $(x-3)$ und $(x+1)$:

Doppeltes Horner-Schema:

	1	-4	-2	12	9
$x=-1$	0	-1	5	-3	-9
	1	-5	3	9	$\boxed{0}$
$x=3$	0	3	-6	-9	
	1	-2	-3	$\boxed{0}$	

Abspaltung des quadratischen Faktors $(x-3)(x+1) = (x^2 - 2x - 3)$ und durch das vereinfachte doppelte Horner-Schema:

	1	-4	-2	12	9
$\boxed{3}$	0	0	3	-6	-9
$\boxed{2}$	0	2	-4	-6	0
	1	-2	-3	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$

Ergebnis: $(x+1)(x-3)(x^2-2x-3) = 0$

Interessanterweise sollte man entdecken, dass der restliche quadratische Term nochmals genau dasselbe Produkt $(x^2-2x-3) = (x-3)(x+1)$ ist, also kann man so darstellen: $(x+1)^2(x-3)^2 = 0$

Lösungsmenge: $L = \{3; -1\}$

Lösungen zu den Gleichungen 5. Grades

Aufgabe 5.1

a) $\frac{1}{20}x^5 - \frac{1}{5}x^4 = 0$

$\frac{1}{20}x^5 - \frac{1}{5}x^4 = 0 \quad | \cdot 20$

$x^5 - 4x^4 = 0$ d.h. $x^4(x-4) = 0$

$x_1 = 0$ ist vierfache Lösung

$x_2 = 4$ ist die zweite aber einfache Lösung.

$L = \{0; 4\}$

b) $\frac{1}{60}x^5 + \frac{1}{12}x^4 = 0 \quad | \cdot 60$

$x^5 + 5x^4 = 0 \Leftrightarrow x^4(x+5) = 0$

$x_1 = 0$ ist somit vierfache Lösung, $x_2 = -5$.

$L = \{0; -5\}$

c) $-\frac{4}{5}x^5 + 3x^3 = 0 \quad | \cdot (-5)$

$4x^5 - 15x^3 = 0 \Leftrightarrow x^3(4x^2 - 15) = 0$

$x_1 = 0$ ist dreifache Lösung.

Aus $(4x^2 - 15) = 0$ folgt $x^2 = \frac{15}{4} \Leftrightarrow x_{2,3} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{15} \approx \pm 1{,}94$

$L = \left\{0; \pm\frac{1}{2}\sqrt{15}\right\}$

d) $-\frac{1}{10}x^5 + 2x = 0 \quad | \cdot 10$

$-x^5 + 20x = 0 \Leftrightarrow x(x^4 - 20) = 0$

$x_1 = 0 \quad x_{2,3} = \pm\sqrt[4]{20} \approx \pm 2{,}1$

$L = \{0; \pm\sqrt[4]{20}\}$

e) $-\frac{1}{4}x^5 - \frac{1}{2}x^4 + x^3 = 0$

$-\frac{1}{4}x^5 - \frac{1}{2}x^4 + x^3 = 0 \quad | \cdot (-2)$!!

$\frac{1}{2}x^5 + x^4 - 2x^3 = 0$

$x^3\left(\frac{1}{2}x^2 + x - 2\right) = 0$

$x_1 = 0$ ist dreifache Lösung

Aus $\left(\frac{1}{2}x^2 + x - 2\right) = 0$ folgen die restlichen Lösungen:

$$x_{2,3} = -1 \pm \sqrt{1+4} = -1 \pm \sqrt{5} \approx \begin{cases} 1{,}24 \\ -3{,}24 \end{cases}$$

$L = \{0; -1 \pm \sqrt{5}\}$

Aufgabe 5.2

a) $\frac{1}{8}x^5 - \frac{1}{4}x^3 - x = 0 \;\big|\cdot 4$!! ergibt $\frac{1}{2}x^5 - x^3 - 4x = 0$

$x \cdot \left(\frac{1}{2}x^4 - x^2 - 4\right) = 0$

$x_1 = 0$ ist die erste Lösung.

Aus $\frac{1}{2}x^4 - x^2 - 4 = 0$ (biquadratische Gleichung) folgt:

$$x^2 = 1 \pm \sqrt{1+8} = 1 \pm 3 = \begin{cases} 4 \\ -2 \end{cases}$$

mit $x^2 = 4 \Rightarrow x_{2,3} = \pm 2$ und $x^2 = -2 \Rightarrow x_{4,5} \notin \mathbb{R}$: $L = \{\, 0 ; \pm 2 \,\}$

b) $\frac{1}{8}x^5 + \frac{1}{4}x^3 + x = 0 \quad | \cdot 4$ und x ausklammern ergibt

$x \cdot \left(\frac{1}{2}x^4 + x^2 + 4\right) = 0$

$x_1 = 0$ ist die erste Lösung.

Aus $\frac{1}{2}x^4 + x^2 + 4 = 0$ (biquadratische Gleichung) folgt:

$x^2 = -1 \pm \sqrt{1-8} \notin \mathbb{R}$ $L = \{\, 0 \,\}$

c) $\frac{1}{10}x^5 - \frac{4}{3}x^3 + 6x = 0 \quad | \cdot 30$ und x ausklammern ergibt

$x \cdot \left(3x^4 - 40x^2 + 180\right) = 0$

1. Faktor: $x_1 = 0$

2. Faktor: $3x^4 - 40x^2 + 180 = 0$ (biquadratische Gleichung)

mit $x^2 = \dfrac{40 \pm \sqrt{1600 - 2160}}{6} \notin \mathbb{R}$

Einzige Lösung ist somit $x_1 = 0$ mit $L = \{\, 0 \,\}$

d) $\frac{1}{27}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + 3x = 0 \quad |\cdot 27$ ergibt $x^5 - 18x^3 + 81x = 0$

$x(x^4 - 18x^2 + 81) = 0$

1. Faktor: $x_1 = 0$

2. Faktor: $(x^4 - 18x^2 + 81) = 0$ (biquadratische Gleichung)

mit $x^2 = \dfrac{18 \pm \sqrt{324 - 324}}{2} = 9$ doppelte Lösung.

Daraus folgt $x_{2,3} = \pm 3$ $L = \{\, 0 ; 3 ; -3 \,\}$

e) $\frac{1}{20}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + 4x = 0 \quad | \cdot 60$ ergibt: $3x^5 - 40x^3 + 240x = 0$

$x(3x^4 - 40x^2 + 240) = 0$

1. Faktor: $x_1 = 0$

2. Faktor: $3x^4 - 40x^2 + 240 = 0$ (biquadratische Gleichung)

mit $x^2 = \dfrac{40 \pm \sqrt{1600 - 2880}}{6} \notin \mathbb{R}$

Einzige Lösung ist also $x_1 = 0$: $L = \{\, 0 \,\}$

Aufgabe 5.3

a) $x^5 + 2x^4 - 8x^3 - 16x^2 - 48x - 96 = 0$

Probierlösung ist – 2.

Bestätigung durch das Horner-Schema, das zugleich die Faktorisierung liefert:

	1	2	-8	-16	-48	-96
	0	-2	0	16	0	96
$x = -2$						
	1	0	-8	0	-48	$\boxed{0}$

Zerlegung in ein Produkt: $(x+2)(x^4 - 8x^2 - 48) = 0$

1. Faktor: $x + 2 = 0 \iff x_1 = -2$ (schon bekannt)

2. Faktor: $(x^4 - 8x^2 - 48) = 0$ (biquadratische Gleichung)

mit $x^2 = \dfrac{8 \pm \sqrt{64+192}}{2} = \dfrac{8 \pm 16}{2} = \begin{cases} 12 \\ -4 \end{cases}$

Aus $x^2 = 12$ folgt $x_{2,3} = \pm\sqrt{12} = \pm 2\sqrt{3}$ und

aus $x^2 = -4$ folgt $x \notin R$

Lösungsmenge: $L = \left\{-2\,;\, \pm 2\sqrt{3}\right\}$

b) $x^5 + x^4 - x^3 - x^2 - 6x - 6 = 0$

Angegebene Lösung ist $x_1 = -1$.

Beweis durch das Horner-Schema, das zugleich die Ausklammerung des Linearfaktors $(x + 1)$ ermöglicht:

	1	1	-1	-1	-6	-6
	0	-1	0	1	0	6
$x = -1$						
	1	0	-1	0	-6	$\boxed{0}$

Produktdarstellung der gegebenen Gleichung:

$(x+1)(x^4 - x^2 - 6) = 0$ Dieses Nullprodukt führt zu

1. Faktor: $x_1 = -1$

2. Faktor: $x^4 - x^2 - 6 = 0$. (biquadratische Gleichung)

mit $x^2 = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \dfrac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} 3 \\ -2 \end{cases}$

Aus $x^2 = 3 \Rightarrow x_{2,3} = \pm\sqrt{3}$

Aus $x^2 = -2 \Rightarrow x_{4,5} \notin R$.

Lösungsmenge $L = \left\{ -1; \pm\sqrt{3} \right\}$

c) $\frac{1}{40}x^5 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{5}{6}x^3 - x^2 + \frac{8}{15} = 0 \quad | \cdot 120$

$$3x^5 - 30x^4 + 100x^3 - 120x^2 + 0x + 64 = 0$$

Angegebene einzige Lösung ist $x_1 = 2$.
Wenn man keine weitere Lösung findet, bleibt nur die Hoffnung, dass 2 eine dreifache Lösung ist, so dass eine Reduktion auf einen quadratischen Term möglich wird.

Anwendung des dreifachen Horner-Schemas:

	3	-30	100	-120	0	64
$x = 2$	0	6	-48	104	-32	-64
	3	-24	52	-16	-32	$\boxed{0}$
$x = 2$	0	6	-36	32	32	
	3	-18	16	16	$\boxed{0}$	
$x = 2$	0	6	-24	-16		
	3	-12	-8	$\boxed{0}$		

Und tatsächlich ergibt sich dreimal die Null als letzte Zahl, damit ist gezeigt, dass $x = 2$ dreifache Nullstelle von f ist, und folglich kann man den Linearfaktor $(x-2)$ dreimal ausklammern (abspalten). Das Restprodukt bilden wir aus den Zahlen der letzten Reihe: $(x-2)^3(3x^2 - 12x - 8) = 0$

Restliche Lösungen: $3x^2 - 12x - 8 = 0$

mit $x_N = \dfrac{12 \pm \sqrt{144+96}}{6} = \dfrac{12 \pm \sqrt{240}}{6} = \dfrac{12 \pm 4\sqrt{15}}{6} = 2 \pm \dfrac{2}{3}\sqrt{15}$

Lösungsmenge $L = \left\{ 2; 2 \pm \frac{2}{3}\sqrt{15} \right\} \approx \{ 2; -0{,}58; 4{,}58 \}$